Mathesis **III 1_2** (2006) 221-239.

Pruebas constructivas y pruebas de existencia

Carlos Torres Alcaraz

Resumen

En este trabajo se examinan los cambios que ha experimentado la noción de prueba en la matemática moderna. Para ello, se contrasta el sentido clásico de esta noción con el punto de vista introducido por la escuela formalista durante el último tercio del siglo XIX. El estudio se lleva a cabo mediante un somero análisis de los métodos de prueba utilizados por Euclides en los *Elementos* en contraste con aquellos propios del álgebra moderna y la teoría de conjuntos. El ensayo finaliza con una reflexión en torno al carácter de la demostración matemática en nuestros días, todo esto a la luz de la tensión producida por dos tendencias extremas: una que ve en la demostración un proceso lógico y formal; otra que ve en ella una empresa que lleva a cabo un sujeto, para quien la demostración es una experiencia real y como tal debe llevar convicción.

Abstract

This is a study about the changes that the notion of proof has gone through in modern mathematics. With this purpose in mind we put in opposition the classical notion of proof with that introduced by the formalist school at the end of the nineteenth century. This is done through a brief analysis of the methods used by Euclid in the *Elements* and those of modern algebra and set theory. The essay ends with a reflection about the character of mathematical proof nowadays, which fluctuates between to opposite ends: one which sees in proof nothing but a logical and formal process, and other that sees in it an enterprise which is carried over by a subject, for whom the proof is a real experience and, as such, must carry conviction.

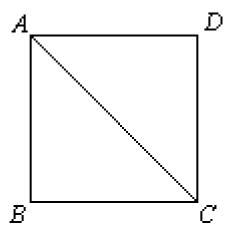
En la matemática los métodos de prueba formal no son estáticos, sino que, por el contrario, cambian con el tiempo. Esto es particularmente cierto con relación a la matemática moderna, donde la aparición de un original concepto de existencia matemática ha dado lugar a nuevos procedimientos y técnicas de demostración. Para comprender el carácter de estos cambios, en lo que sigue contrastaremos la noción clásica de demostración (digamos, la practicada hasta fines del siglo XVIII) con la demostración formal de la matemática moderna, sobre todo en lo tocante a los métodos no constructivos de esta última. Esto explica la selección de los temas. Esperamos que tal comparación resulte en una mejor comprensión del carácter de la matemática moderna.

Hechas las salvedades del caso, dirijamos nuestra atención a la matemática griega, sobre todo en lo relativo al método adoptado por Euclides en los *Elementos*.

Primeras pruebas

La demostración matemática, en su acepción clásica, es una invención de los griegos. Fueron ellos los primeros en insistir en que el sostén de las proposiciones matemáticas debe ser la argumentación lógica, no la evidencia empírica. Sabemos, por ejemplo, que en el siglo VI a. C. ya se contaba con algunas demostraciones como la del teorema de Tales o la de la inconmensurabilidad del lado y la diagonal de un cuadrado.[1] De éstas, la segunda se reconoce, además, como la primera por reducción al absurdo y la primera de una imposibilidad. Al analizarla, podemos descubrir el uso de algunos principios lógicos tradicionales como los del tercero excluido y de no contradicción, que más adelante investigaría Aristóteles *in extenso*. Examinemos brevemente la manera en que la tradición griega nos ha transmitido este argumento [Heath 1956 III, 2].

Supongamos que *AC*, la diagonal de un cuadrado, es conmensurable con *AB*, su lado. Sea $c : b$ la razón entre ellos, expresada como una fracción irreducible.



Tenemos $AC^2 : AB^2 = c^2 : b^2$, y como $AC^2 = 2AC^2$ (teorema de Pitágoras), $c^2 = 2b^2$.

Por tanto, c^2 es par, y c es par también (pues un número es como su cuadrado: par o impar).

1. Si bien sabemos que los griegos fueron los creadores de la matemática demostrativa, ignoramos quién fue el artífice de la primera demostración en este sentido. Al respecto, se menciona a Tales de Mileto y a Pitágoras, aunque las referencias son lejanas y poco precisas.

Dado que la fracción $c : b$ es irreducible y c es par, b es impar.
Sea $c = 2a$.
De $c^2 = 2b^2$ se sigue que $4a^2 = 2b^2$.
Ergo $2b^2 = b^2$, de modo que b es par. Luego b es par e impar, lo cual es imposible.
Por tanto, AC y AB no son conmensurables. Lcqd.

Un examen del argumento anterior nos muestra que éste se basa en los principios lógicos de no contradicción y del tercero excluido. Tenemos: ‘Si la diagonal de un cuadrado es conmensurable con su lado, entonces hay un número *b* que es par y no es par a la vez’. Por tanto, si la diagonal de algún cuadrado es conmensurable con su lado, habrá un número *b* con dicha propiedad; no obstante, esto es imposible en virtud del principio lógico de no contradicción: no a la vez *P* y no *P*. Por tanto, es falso que la diagonal y el lado del cuadrado sean conmensurables, pues de otro modo se quebrantaría el principio de no contradicción. Asimismo tenemos: ‘la diagonal de un cuadrado es conmensurable con su lado, o la diagonal de un cuadrado no es conmensurable con su lado’; esto, en virtud del principio lógico del tercero excluido: cuando dos proposiciones están opuestas contradictoriamente, no pueden ser ambas falsas; *P* o no *P*. Dado que la proposición ‘la diagonal de un cuadrado es conmensurable con su lado’ es falsa, la alternativa ‘la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con su lado’ es, según este principio, verdadera.

Observemos cómo los principios lógicos referidos dan a la deducción anterior un cariz formal, en el que la relación entre las proposiciones desempeña un papel importante. Por ejemplo, se dice: si *P* es falsa, entonces no *P* es verdadera. Esta operación formal se coloca por encima de la intuición y nos libera, al menos parcialmente, de ella.

Euclides

En la historia de la demostración matemática, Euclides ocupa un lugar especial. No es que todas las pruebas que figuran en los *Elementos* sean de su invención, o que él fuera el creador de los métodos de demostración que utiliza; más bien, su importancia radica en que él fue quien fijó la norma de rigor para las pruebas matemáticas prevaleciente hasta el siglo XIX. Los efectos de su obra se pueden observar no sólo en las matemáticas, sino en otros dominios. Un ejemplo clásico es la mecánica de Arquímedes. Se trata de un sistema de postulados en el mismo espíritu y bajo los mismos estándares que los *Elementos*. Enfoques similares fueron adoptados por Galileo y Newton en la física, y por

Spinoza en la ética. El mismo Hilbert tácitamente se reconoce como un heredero de la tradición euclidiana al insistir en la necesidad de renovar e instaurar este método, no sólo en la matemática sino en todas las esferas del conocimiento en general.

A falta de espacio, y suponiendo que la obra de Euclides es bien conocida, en adelante sólo trataremos con algunos aspectos estructurales de los *Elementos* a fin de resaltar la concepción helénica del conocimiento geométrico y el carácter de la demostración.

La forma dada por Euclides a la geometría fue durante mucho tiempo un modelo insuperable de teoría deductiva.[1] Los términos propios de la teoría jamás se utilizan antes de ser definidos y, a excepción de un pequeño número de proposiciones que se enuncian inicialmente a título de principios, ninguna proposición se admite sin ser demostrada. Esta condición es, por lo demás, inevitable: la demostración no puede, en efecto, remontarse al infinito, sino que se debe sustentar en algunas proposiciones primeras. Al respecto, Euclides tiene el cuidado de elegir los principios de tal manera que las dudas que pudieran surgir respecto a su validez sean mínimas. Aunque todo lo que se afirma en la teoría parece ser empíricamente verdadero, jamás se invoca a la experiencia como justificación, sino que se procede por vía demostrativa, fundándose las pruebas sobre lo que se ha establecido previamente y en aparente conformidad con las leyes de la lógica.[2] Así, en los *Elementos* cada teorema se expone como enlazado a los principios mediante una relación de necesidad lógica, como una consecuencia de ellos.

En cuanto a las demostraciones que figuran en los elementos, éstas las podemos dividir en dos clases: las directas y las que proceden por reducción al absurdo. Las demostraciones directas se dividen, a su vez, en dos grupos: apodícticas y constructivas. Las primeras tienen como propósito elucidar las propiedades de los objetos geométricos y las relaciones entre las configuraciones geométricas; las segundas, exhibir los objetos propios de la geometría (triángulos, segmentos, círculos, etc.), sacándolos a la luz mediante una construcción. Esto significa, entre otras cosas, que la construcción euclidiana no tiene como finalidad hacer existir los objetos —no es, como decimos ahora, una ‘prueba

1. Dice Hilbert [1993, 26] al respecto: ‘‘El método euclidiano de investigación se convirtió con el tiempo en el prototipo de la investigación axiomática, convirtiéndose también la geometría en un modelo para la construcción axiomática en general’’.
2. Esta idea es uno de los grandes aportes del pensamiento griego a la posteridad: que la estructura del espacio es algo enteramente racional, misma que se puede caracterizar en términos de unos cuantos conceptos y principios básicos sin recurrir a la experiencia.

de existencia'—, sino hacer visible aquello que de momento no lo está. Esto nos remite a la cuestión del objeto de estudio.

La geometría clásica no duda la realidad de sus objetos, y en ningún momento se ocupa de probar su existencia mediante una construcción. Por ejemplo, no se pregunta por la existencia de un cuadrado cuya área sea igual a la de una círculo dado; más bien, lo que en ella se discute es la manera de construirlo. Esto tiene un efecto en los métodos de prueba formal utilizados. Si la demostración no es una manera de hacer existir los objetos, la posibilidad de probar su existencia de manera indirecta no tiene cabida en esta teoría. Dicho en lenguaje moderno: en la geometría clásica no hay pruebas de existencia por reducción al absurdo; éstas no forman parte de sus métodos formales. Esto, como veremos, establece una diferencia fundamental con la matemática moderna, donde las pruebas puramente existenciales desempeñan un importante papel.

La base axiomática de los *Elementos*

En los *Elementos*, los principios demostrativos se dividen en dos clases: axiomas (o nociones comunes) y postulados. En su acepción clásica un *axioma* es un principio que por su misma dignidad, es decir, por el lugar que ocupa en un sistema de proposiciones, debe ser estimado como verdadero.[1] Su principal característica es la de ser evidente, es decir, la de manifestar su verdad de inmediato y obligar al asentimiento una vez que se le enuncia y entiende. Por ejemplo, 'dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí'. Se trata de principios que van más allá de la geometría, hasta constituir el fundamento de toda ciencia. Se les llama por ello *nociones comunes*, como en los *Elementos*, pues son indispensables para aprender cualquier cosa. Pertenecen, además, a todos los hombres, o, al menos, son de tal naturaleza que cualquier hombre puede apropiarse de ellos y usarlos como suyos. Los principios lógicos de no contradicción y del tercero excluido son, en este sentido, axiomas en el más puro sentido de la palabra, es decir, leyes fundamentales del pensamiento, principios que debe poseer necesariamente el que quiere aprender algo.

Por su parte, un *teorema* es, en su acepción clásica, una proposición que puede ser demostrada,[2] y un *postulado* una proposición que, no siendo demostrable o evidente por sí misma, se admite, o se requiere que sea admitida, a fin de hacer posible una demostración. Este es el sentido que les da Euclides a estos dos términos, aunque denomina

1. Del griego *axĩõma* 'lo que parece justo', 'rango', 'reputación', 'dignidad'.
2. Del griego *theorema* 'meditación, investigación' [Aristóteles, *Metafísica*, XIV, 2, 1090 a 14].

proposiciones a los teoremas. El significado original de 'postulado' es 'petición', o 'requerimiento'.[1] El término nació en las matemáticas y fue tomado de ahí por Aristóteles. En relación a los axiomas, los postulados se distinguen por su menor grado de evidencia, pese a que se les admite y utiliza sin demostración. Un postulado es, además, una proposición que no tiene por qué ser creída por aquel al cual se dirige, y difiere de la hipótesis en que esta última es una proposición que se pone para someterla a prueba, es decir, para atestiguarla o confirmarla a través de sus consecuencias.[2] En los *Elementos*, los postulados expresan dos cosas: lo que se requiere para construir objetos geométricos y poblar de este modo el espacio (postulados I, II y III), y lo que se requiere para preparar y hacer posible la demostración y que la intuición no proporciona sin más (*e.g.*, postulados IV y V). La falta de evidencia del quinto postulado es particularmente notoria en este caso.[3] En él, Euclides nos pide aceptar que, bajo ciertas condiciones, dos rectas se cortarán al ser prolongadas, evidencia que la intuición no proporciona por sí misma.

En cuanto a la demostración, ésta se desarrolla en los *Elementos* mediante una sucesión de pasos demostrativos elementales, reunidos en su mayor parte por Aristóteles en el *Organon* y por los megáricos y estoicos en su lógica proposicional. Algunas reglas de inferencia de uso frecuente en los *Elementos* son las siguientes:

1) Inversión lógica: si la implicación $p \rightarrow q$ es verdadera, también la implicación $\neg q \rightarrow \neg p$ es verdadera.
2) Reducción al absurdo: Si vale la implicación $p \rightarrow \neg p$, la proposición $\neg p$ será verdadera. De igual forma, si vale la implicación $p \rightarrow (q \wedge \neg q)$, la proposición $\neg p$ será verdadera.
3) Silogismo proposicional: si las implicaciones $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$ son verdaderas, también la implicación $p \rightarrow r$ es verdadera.
4) Aplicación del silogismo relacional con base en las nociones comunes. Por ejemplo, si las igualdades $a = b$ y $b = c$ son válidas, también será válida la igualdad $a = c$; o bien: si $a > b$ y $a = c$, entonces $c > b$.

1. En español 'postulado' se toma del latín *postûlare*, 'pedir', 'solicitar', 'pretender'.
2. Esta idea de los axiomas como principios evidentes en virtud de sus mismos términos perduró desde la Antigüedad hasta la Edad Moderna, y sólo los cambios ocurridos en el siglo XIX pudieron modificar este punto de vista. En la actualidad, en la esfera de la matemática pura, los axiomas no se consideran ni verdaderos ni falsos, sino meras suposiciones adoptadas por motivos de conveniencia, como puntos de partida de la demostración. Así, los axiomas no se distinguen de los postulados, y las dos palabras se usan actualmente en forma alterna.
3. De hecho, esta falta de evidencia se quiso corregir desde la Antigüedad, mostrando que se trataba de un teorema. De ello dan prueba los esfuerzos de Claudio Ptolomeo (100-178) y Proclo (410-485).

5) Ampliación lógica: si p es verdadera y q es verdadera, también la conjunción $p \wedge q$ es verdadera; o bien, si $p \to r$ y $q \to s$, entonces $(p \wedge q) \to (r \wedge s)$ y $(p \vee q) \to (r \vee s)$
6) Negación de una de las alternativas: si vale que $p \vee q$ y p es falsa, q es verdadera.
7) *Modus Ponens*: si $p \to q$ es verdadera, y se sabe —por hipótesis o por demostración— que p es verdadera, habrá que afirmar que q también es verdadera.
8) Regla de substitución. Esta regla se hace presente al indicar, por ejemplo, que un proceso demostrativo hecho con ciertas magnitudes se puede llevar a cabo con otras magnitudes sin alterar su validez, o al sustituir cosas iguales entre sí.

En la mayoría de los casos hemos expresado las reglas como lo hicieron estoicos y megáricos en la lógica proposicional, aunque éstas se pueden convertir a la 'lógica de términos' aristotélica mediante diversas gradaciones. El recíproco también es cierto. Así, por ejemplo, la regla (3) es la forma que toma, en la lógica proposicional de los estoicos, el modo *Barbara* del silogismo aristotélico.

Examinemos a manera de ejemplo la forma en que Euclides [69-70] demuestra la proposición I.27 en los *Elementos*.

Proposición I.27.- Si una recta, al caer sobre dos rectas hace ángulos alternos iguales entre sí, serán tales rectas paralelas entre sí.

27.1 Haga la recta *EF*, cayendo sobre dos rectas *AB* y *CD*, ángulos alternos iguales entre sí, *AEF* y *EFD*. (Hip.)

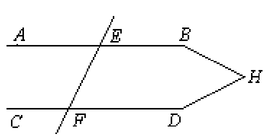
27.2 Digo que la *AB* es paralela con la *CD*. (Tes.)

DEMOSTRACIÓN

27.31 Porque si no lo fueran, prolongadas *AB* y *CD* se encontrarían o hacia el lado *BD*, o hacia el *AC*. (D.I.23)

27.32 Prolónguense, pues; (P. II)

27.33 y encuéntrense por el lado *BD* en el punto *H*. (Hip.)



27.34 En este caso el ángulo externo *AEF* del triángulo *HEF* será igual al *EFH*, interno y opuesto a él; (Hip. 27.1)
27.35 es así que esto es imposible, (P.I.16)
27.36 luego las rectas *AB* y *CD* prolongadas hacia el lado *BD* no se cortarán. (Red. Ab.)
27.37 Y de parecida manera se demostrará que tampoco se cortan hacia el lado *AC*. (Subst.)
27.41 Pero si no se cortan hacia ninguno de los lados,
serán paralelas. (D.I.23)
27.42 Luego la *AB* es paralela con la *CD*.
27.12 Pues sí una recta, al caer sobre dos rectas, hace ángulos alternos iguales entre sí, serán tales dos rectas paralelas entre sí.♦

Análisis formal de la demostración anterior. Denotemos con letras algunas proposiciones que interviene en la demostración:

Letra	Proposición (en notación moderna)
P	$\angle AEF = \angle EFD$
Q	$AB \parallel CD$ o bien: $L_1 \parallel L_2$, donde L_1 es la línea por A, B y L_2 la línea por C, D.
R	$\exists H(H \in L_1 \wedge H \in L_2)$
S	Hay un triángulo Δ del que $\angle AEF$ es un ángulo exterior y $\angle EFD$ es un ángulo interior y opuesto a $\angle AEF$.
T	$\angle AEF > \angle EFD$

Tenemos:

1. P	Hipótesis.
2. Q	Tesis.
3. $\neg Q \to R$	Por definición de *paralelismo.*
4. $R \to S$	Por consideración de la figura.
5. $S \to T$	Proposición I.16 (teorema ya demostrado).
6. $R \to T$	Silogismo proposicional a 4 y 5.
7. $T \to \neg P$	Noción común implícita.
8. $R \to \neg P$	Silogismo proposicional a 6 y 7.
9. $R \to (P \wedge \neg P)$	Ampliación lógica a 1 y 8.

10. $\therefore \neg R$	Reducción al absurdo a 9.
11. $\neg R \rightarrow Q$	Inversión lógica a 3.
12. Q	*Modus Ponens* a 10 y 11. ♦

Como es evidente, la demostración descansa casi en su totalidad en la lógica proposicional. Esto se debe en gran medida al uso de figuras en la prueba. Por ejemplo, Euclides nos pide que tracemos las rectas *AB*, *CD* y *EF*; se refiere concretamente a los ángulos *AEF* y *EFD*; considera un supuesto triángulo *EFH* que también representa con un disparatado dibujo, etc. con lo cual todo el argumento lo teje en torno a la figura, convirtiéndola en un integrante esencial del mismo y limitando las proposiciones a enunciados referidos a ella. No hay, por tanto, en los *Elementos* una teoría de la cuantificación propiamente dicha.[1]

Lo que acabamos de decir en relación a la proposición I.27 no es un hecho aislado, sino un rasgo esencial de la demostración euclidiana. No es que las figuras sean simples auxiliares del razonamiento, o meras ilustraciones sensibles. Nada hay de ello: sin la figura, trazada o imaginada, la demostración se viene abajo. Dice Kline [1994, 1328]: ‘‘Se suponía que la geometría euclídea ofrecía pruebas rigurosas de teoremas sugeridos intuitivamente por las figuras, pero de hecho ofrece demostraciones intuitivas a partir de figuras dibujadas rigurosamente’’. Si bien este comentario subraya un aspecto importante de la demostración euclidiana, creemos que lo justo es decir que se trata de una mezcla de argumentos de dos tipos: intuitivos y formales.

Como quiera que sea, en su aspecto formal la demostración euclidiana no va más allá de la noción clásica que introdujera Aristóteles en los *Segundos Analíticos*: un argumento en el que se extrae una conclusión a partir de principios primeros y de otras proposiciones deducidas de la misma manera. Esta noción no cambió con el advenimiento de la matemática moderna: lo que en ésta se modifica es, por una parte, el conjunto de principios aceptados, y, por la otra, los métodos de demostración. De esto nos ocuparemos en lo que sigue.

1. En general, Euclides procede en la forma recién descrita en sus demostraciones. Es precisamente este factor lo que le permite limitar las formas de argumentación a la lógica proposicional. Razona, por decirlo así, sobre la figura concreta, por lo que los juicios son particulares, no universales. No obstante, en ningún momento —salvo por honrosas equivocaciones— hace valer nada que dependa de la ‘figura sobre el papel’ sin ser compartido por todas las de su tipo. La figura representa, por así decirlo, a todas las de su especie, teniéndose lo que Kant refiere como la consideración de lo universal en lo concreto, en la intuición singular [véase: Kant, A 735, B 763].

La matemática moderna

La distinción entre axioma y postulado se mantuvo mientras se conservó el concepto tradicional de axioma como 'verdad evidente por sus propios términos'. Tal distinción llegó a su fin con el advenimiento de la matemática moderna, en la que a ambos elementos se les niega toda verdad o evidencia. La historia que llevó a adoptar este punto de vista es bien conocida, y comprende las siguientes circunstancias:

1) Los intentos por demostrar el quinto postulado de Euclides, los cuales desembocaron en el descubrimiento de su independencia y la posibilidad de desarrollar geometrías distintas a la euclidiana. Esto condujo a la necesidad de reexaminar la naturaleza de los axiomas y los postulados y a la eventual negación de cualquier significado preestablecido para ellos.

2) El surgimiento del álgebra abstracta, en la que los signos ya no están obligados a representar objetos específicos. Desde entonces el álgebra se piensa, en su aspecto más general, como una disciplina abstracta que trata con relaciones y operaciones entre objetos indefinidos, donde lo único que importa son las leyes que gobiernan su combinación.[1] Aquí también, los axiomas no significan algo por sí mismos, ni expresan la verdad en relación a un sistema de objetos —o, en caso de hacerlo, esto es irrelevante para el desarrollo de la teoría—. Piénsese, por ejemplo, en el álgebra de Boole o la teoría de grupos.

3) El desplazamiento de la matemática hacia un grado mayor de abstracción con la introducción de la teoría de conjuntos. Con sus conceptos, esta teoría enriqueció y generalizó muchos dominios de la matemática hasta convertirse en un substrato común a todos ellos. De esta manera la matemática se hizo de un procedimiento uniforme para componer estructuras abstractas, es decir, sistemas de objetos acerca de los cuales lo único que se sabe es que satisfacen ciertas relaciones definidas mediante axiomas. Tal es, por ejemplo, el caso de la aritmética de Peano o de la geometría de Hilbert en los *Grundlagen der Geometrie*.

Tras estos cambios, las teorías matemáticas se pudieron desarrollar en forma abstracta, sin considerar la naturaleza de sus objetos, convirtiéndose de esta manera en enormes construcciones racionales sujetas a la condición de ser internamente consistentes (no contradictorias). Desde este punto de vista, cada teoría se concibe como un entramado de relaciones entre objetos que, ex profeso, permanecen indefinidos. La

1. Es decir, el álgebra se liberó del concepto de *cantidad* y abrió sus puertas a una multitud de operaciones que dependían más que nada de su representación simbólica.

pregunta por la verdad de los axiomas carece de valor a este nivel: cualquiera que sea la respuesta, ésta es irrelevante para el desarrollo interno de la teoría. Por ello es que en la matemática pura pueden coexistir teorías rivales en pie de igualdad como, por ejemplo, la geometría elíptica y la geometría hiperbólica.

El alcance epistemológico de este cambio ha sido considerable. En particular, ha contribuido a desplazar el interés de la matemática pura hacia los aspectos estructurales de sus teorías, preocupándose más por la integración de las proposiciones al sistema y dejando de lado la pregunta por su verdad extrínseca. Consideremos, por ejemplo, la siguiente pregunta: ¿la suma de los ángulos interiores de un triángulo, es igual, mayor o menor que dos ángulos rectos? Un geómetra antiguo habría respondido que de los tres casos, el primero es verdadero y los otros dos falsos. Para un geómetra moderno se trata de tres teoremas distintos, que no se excluyen mutuamente sino en el interior de un mismo sistema, según sea el número de paralelas que se postule.[1] Es más, se puede tratar de una cuestión indeterminada, como sucede cuando en el sistema el número de paralelas posibles se deja en suspenso. La pangeometría de Lobachevsky es un ejemplo de ello.

Vemos entonces cómo la matemática moderna logró separar dos aspectos de sus teorías que hasta principios del siglo XIX se hallaban entremezclados. Inicialmente, un teorema —digamos, de la geometría— era a la vez un informe sobre las cosas y una construcción de la razón, una ley que gobernaba al espacio físico y una pieza de un sistema lógico. De estas parejas, la matemática pura abandonó el primer elemento, que remite a la matemática aplicada.[2] Ya no hay tal dualidad: de los enunciados de una teoría, lo único que cuenta es su lugar en el sistema. Esta es la vía por la cual accedió el formalismo a la matemática. Claro está que la posibilidad misma de este punto de vista tiene como base el recurso a la prueba formal, es decir, la posibilidad de independizar las pruebas de su contenido material.

Como a continuación veremos, esta visión de la actividad matemática no cuenta con la aceptación de todos, al menos en la forma extrema en que la hemos expuesto. Hay en todo caso una escala muy grande de ‘grados de aceptación’ que, por cierto, no consideraremos en detalle.

1. El hecho de que la experiencia pueda validar una de estas tres proposiciones no concierne más que a la utilización práctica de la geometría, no a la ciencia pura de la geometría.
2. Por ejemplo, en nuestros días la relación entre la geometría y el espacio físico ya no se considera asunto de las matemáticas, sino de la física y las ciencias experimentales.

Una breve digresión en torno al carácter de la demostración

Es importante señalar que, en la época moderna, el análisis de la demostración no ha marchado en exclusiva por el camino de la axiomática. Más bien, éste se ha conducido entre dos extremos opuestos. Por una parte, se tiene la insistencia en el papel del sujeto en el proceso de demostración y en la aceptación de una proposición como demostrada. Por la otra, se encuentra el análisis de los métodos de prueba matemática con base en la formalización de sus teorías. En el primer caso se trata de investigar el papel que desempeñan la intuición, la analogía y la experiencia en el descubrimiento de una demostración o en la solución de un problema, donde el actor central es el sujeto que descubre, que demuestra.[1] En el segundo, la demostración se analiza en tanto que proceso formal, separada de toda intuición, *sin sujeto*. Desde este punto de vista, que es el de mayor interés en estas páginas, la matemática pura se entiende como una teoría general de relaciones en la que la única limitante es que los axiomas formen un todo coherente, pudiéndose adoptar, como ya ha sucedido, métodos que suscitan dudas acerca de su validez a quienes se preocupan por los otros aspectos ya mencionados.

Para algunos seguidores de la primera tendencia sólo se tiene una demostración cuando los métodos utilizados tienen un soporte intuitivo. Argumentos de este tipo son los que han llevado al rechazo de algunos métodos de demostración cuya legitimidad se considera, por decir lo menos, dudosa; por ejemplo, el axioma de elección, las pruebas de existencia por el absurdo o la prueba por la diagonal de Cantor. Por el contrario, los seguidores de la segunda tendencia procuran rehuir todo factor psicológico, tratando de dar a la demostración un valor objetivo. En este segundo sentido, la teoría de la demostración se interesa básicamente en el estudio de los procesos de prueba formal, antes que en el análisis de las condiciones bajo las cuales se produce el acto mismo de ‘probar’.[2] En última instancia dirían que la epistemología matemática no puede ocuparse de los aspectos subjetivos de la demostración, y que a fin de cuentas cualquier cosa que sea reconocida como una demostración por los seguidores de la primera tendencia ha de traducirse en una prueba formal apegada a los cánones de la lógica.

1. Estas circunstancia es, además, inevitable: el procedimiento deductivo que puede llevar a la solución de un problema no está dispuesto de antemano, sino que, por el contrario, se le ha de descubrir o inventar, lo cual requiere de un sujeto que inventa, que imagina.
2. Frente a esta pretensión de eliminar todo lo *psicológico*, algunos argumentan que hay algo ‘privado’ en la aceptación o no aceptación de una prueba, y que este factor no se puede soslayar. Mientras que otros sostienen que la demostración es una actividad constructiva del espíritu previa al establecimiento de cualquier tipo de reglas, y que la axiomatización no es sino una sombra del verdadero proceso que lleva a cabo el sujeto.

Dado que en este trabajo nuestro interés se centra en los métodos formales de la matemática y no en el análisis de la actividad del matemático, los aspectos subjetivos recién señalados no serán tomados en cuenta. No obstante, esto lo hacemos sin olvidar el valor que encierra la discusión anterior. Es indudable que en la práctica ordinaria la demostración sigue oscilando entre una función psicológica (provocar el asentimiento) y una función lógica (organizar las proposiciones de un sistema), y que la epistemología matemática no ha podido resolver la tensión entre ellas.

La demostración en la matemática moderna

En la matemática moderna hay dos métodos de prueba que renuncian deliberadamente al constructivismo de Euclides. Se trata de las pruebas de existencia por el absurdo y la pruebas basadas en el axioma de elección. Las primeras tienen como base la aceptación indiscriminada del principio del tercero excluido; las segundas, la renuncia al requerimiento de contar con un método o procedimiento efectivo para elegir los elementos que habrán de integrar un conjunto.

La primera prueba de existencia por el absurdo data del siglo XIX. Se trata de un teorema sobre formas algebraicas demostrado por Hilbert en 1888.[1] Es el siguiente:

> Dada una colección infinita de formas algebraicas de cualquier grado en *n* variables, existe un número finito de formas $f_1, f_2, \ldots, f_k$, (una *base*) tal que cualquier forma *f* de la colección se puede escribir como
>
> $$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_k f_k$$
>
> donde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son formas apropiadas en las *n* variables (no necesariamente del sistema finito) con coeficientes en el mismo dominio que los miembros de la colección.

Para probar este teorema Hilbert no tuvo que construir una base, como hasta entonces se había intentado. Lo que hizo fue probar que dicha base debía existir *por necesidad lógica*, es decir, que cualquier otra circunstancia llevaría a una contradicción. Esta novedosa forma de razonamiento iba en contra del constructivismo tradicional, según el cual la única manera de hacer existir una entidad matemática es mediante su construcción. Si bien

1. El teorema se relaciona con un problema planteado por Paul Gordan pocos años antes en la teoría de los invariantes: Dado un sistema de formas invariantes, ¿habrá un sistema finito de invariantes en términos de las cuales cada uno de los invariantes se puede expresar como una combinación lineal (es decir, habrá una base finita para el sistema)?

de inmediato se produjeron reacciones, sobre todo por parte de los opositores a la teoría cantoriana de conjuntos y a la aceptación del infinito actual en matemáticas, muy pronto las pruebas de existencia por reducción al absurdo se convirtieron en un instrumento de uso común.

Es fácil entender porqué para el constructivismo los argumentos de esta índole no son una prueba matemática: No puede haber existencia sin construcción. Con su demostración, Hilbert defiende un punto de vista afín al de la naciente axiomática formal ya referido en estas páginas: el matemático no está obligado a construir los objetos con los que trata. Hilbert incluso va más allá de este punto: hace 'existir' los objetos mediante la adopción de un principio estrictamente formal, según el cual algo existe cuando su hipotética inexistencia conduce a una contradicción. Este original método de prueba se apoya decididamente en el principio del tercero excluido, que hasta ese momento había tenido un uso limitado, y relativiza la noción de existencia matemática a la simple consistencia formal. En breve volveremos a este punto.

El principio del tercero excluido

Veamos cómo las pruebas de existencia por el absurdo se apoyan en el principio del tercero excluido. Supongamos que queremos demostrar un teorema existencial de la forma $\exists x p(x)$. El método consiste en suponer como hipótesis la negación de lo que se quiere demostrar —en este caso la proposición $\neg\exists x p(x)$— y deducir de ella una contradicción, es decir, una proposición de la forma $q \wedge \neg q$.

Supongamos que tal ha sido el caso, y que de $\neg\exists x p(x)$ se ha inferido $q \wedge \neg q$. Como la conclusión alcanzada va en contra del principio de no contradicción, la hipótesis $\neg\exists x p(x)$ se rechaza, y es entonces que entra en escena el principio del tercero excluido. De la alternativa

$$\exists x p(x) \vee \neg\exists x p(x)$$

sabemos que el término de la derecha es imposible, por lo que gráficamente tenemos la siguiente situación:

$$\exists x p(x) \vee \neg\exists \cancel{xp(x)}$$

Como es evidente, la única posibilidad restante es la proposición $\exists x p(x)$, que así queda demostrada. De esta manera, con base en el principio del tercero excluido podemos hacer 'existir' un objeto sin necesidad de saber cómo se le puede hallar, pues la reducción al absurdo lo que produce es una contradicción, y esto en nada se parece a una construcción.[1]

1. En el análisis matemático son muy frecuentes las pruebas no constructivas o *indirectas*, muchas de las cuales, por su misma naturaleza, no se pueden convertir en

Esta novedosa manera de probar la 'existencia" de un objeto es el complemento de las pruebas de inexistencia por reducción al absurdo que, como hemos visto, han sido aceptadas desde un principio en la matemática (*e. g*., al probar la inconmensurabilidad del lado y la diagonal de un cuadrado). Frente al dilema de permanecer dentro de los límites del constructivismo o hacer valer las leyes de la lógica clásica en toda su extensión, Hilbert opta por lo segundo.

La existencia matemática y el axioma de elección

Hacia finales del siglo XIX la matemática experimentó un cambio radical en cuanto a la noción de existencia matemática. Desde entonces, se acepta como existente (en un sentido matemático) toda entidad cuya asunción no implique contradicción. Este criterio lo expresa Hilbert abiertamente en una carta dirigida a Frege en 1899:

> De la verdad de los axiomas usted deduce que no pueden contradecirse entre sí, mientras que yo, por mi parte, creo lo contrario, que cuando los axiomas no se contradicen entre sí, por ese motivo son verdaderos, y por ese motivo los objetos que definen existen [Bochenski 1995, 341].

En la actualidad muchos matemáticos asumen, tácita o explícitamente, esta postura. Según esto, afirmar la existencia de una entidad matemática significa simplemente que podemos suponer su existencia sin introducir contradicciones en el sistema. Esto conlleva la idea de que los axiomas matemáticos no describen ninguna realidad; más bien, definen implícitamente aquellos objetos con los que tratan: una novedosa manera de entender la existencia matemática.

El nexo de esta postura con las pruebas de existencia por el absurdo es evidente: si en una teoría una proposición $\neg\exists x p(x)$ conduce a una contradicción, entonces la proposición $\exists x p(x)$ es compatible con los axiomas y puede añadirse a la teoría (*i. e*., se le acepta como demostrada). No es que la contradicción sea una señal que indica la presencia de una entidad preexistente, sino que la no contradicción es el criterio interno de existencia matemática.[1] La adopción de este punto de vista tiene dos ventajas: primero, otorga a la existencia matemática un carác-

demostraciones directas. Tal es el caso, por ejemplo, del teorema del valor medio. Dada la función *exp*(*sen x*) y el intervalo $[\pi, \pi^{\pi}]$, ¿cuál es el valor medio en este caso?

1. En otras palabras: cuando se dice que ciertas entidades matemáticas existen, lo que se dice es que podemos caracterizarlas mediante axiomas sin incurrir en contradicciones. Un mérito de esta postura es que confiere a los enunciados de la matemática un sentido propio, más débil que el de la existencia empírica, a la vez que evita caer en el nominalismo radical, según el cual la matemática no tiene en absoluto ningún objeto de estudio, siendo tan sólo un sistema de enunciados vacíos de todo contenido [véase: Carnap 1935, 37].

ter relativo (la misma relatividad de la no contradicción), con lo cual el investigador se ve liberado de la farragosa metafísica del platonismo radical; segundo, concede al matemático una gran libertad al momento de escoger su objeto de estudio, fijando como único límite la no contradicción.[1]

Esta reducción en las exigencias a la existencia matemática —que, paradójicamente, coincide con la instauración de un nuevo estándar de rigor en la demostración matemática— abre las puertas a nuevos principios que abiertamente desobedecen el precepto de que no hay existencia sin construcción. Pensemos, por ejemplo, en el postulado de Dedekind que asegura la continuidad de la recta numérica, o en el axioma de elección, que afirma la existencia de una función sin decir cómo se la puede hallar. Este último dice lo siguiente:

> Si X es una colección no vacía de conjuntos no vacíos, existe una función f definida en X tal que para cada conjunto S de X, $f(S)$ es un elemento de S. [En un lenguaje menos técnico: Si X es una colección de conjuntos no vacíos, es posible *elegir* un miembro de cada conjunto de la colección].

El axioma parece obvio: dada una colección de conjuntos X, ¿qué nos impide tomar un objeto de cada uno de ellos, y formar una nueva colección? En apariencia, nada. No obstante, hay casos en los que la expresión 'tomar un objeto de cada elemento de X' es imprecisa. Veamos un par de ejemplos contrastantes.

1. Sea X la colección de todos los intervalos abiertos (a, b) de números reales, con $a < b$. Aquí, el axioma de elección es innecesario, pues podemos definir una regla para hacer la elección. Por ejemplo, la función f se puede definir como la función que asocia a cada intervalo (a, b) su punto medio, *i. e.*, $f((a, b)) = ½(a + b)$.
2. Sea X el conjunto de todos los conjuntos no vacíos de números reales. En este caso sí hay un problema: no sabemos cómo definir una función f que elija un miembro de cada conjunto, pues sin el axioma de elección

1. En 1883 Cantor escribe: ''La matemática es enteramente libre en su desarrollo, y sus conceptos sólo se ven restringidos por la necesidad de ser no contradictorios y estar coordinados con los conceptos previamente introducidos mediante definiciones precisas [...]. La esencia de las matemáticas reside en su libertad'' [citado en Kline 1994, 1358-9]. Fue esta libertad lo que permitió a Cantor erigir una teoría de conjuntos transfinitos, en la que la idea central es la de infinito actual. Esta noción, que no se puede representar *a priori* en la intuición ni corresponde a nada empírico, tendrá, según Hilbert, plena existencia matemática si los principios que la definen (los axiomas) no se contradicen entre sí.

no es posible bien ordenar el conjunto de los números reales para seleccionar, de cada *S* en *X*, al primero de sus elementos.

He aquí lo esencial del axioma. Lo único que afirma es la existencia de una función *f* que *elige* un elemento de cada conjunto perteneciente a la colección, sin dar indicaciones sobre cómo se le puede definir. Simplemente, establece su existencia. Es más, cuando en una demostración se tiene la posibilidad de definir la función *f*, por ese mismo hecho es innecesario acudir al axioma de elección (como en el ejemplo 1 anterior), de modo que su intervención sólo se suscita en las demostraciones no constructivas.

Otra razón por la cual algunos matemáticos no gustan del axioma de elección es por sus implicaciones contraintuitivas. Por ejemplo, con base en él, Banach y Tarski demostraron que la esfera sólida de radio 1 se puede descomponer en un número finito de piezas de modo que, mediante rotaciones y traslaciones, los fragmentos se pueden reagrupar hasta formar dos esferas sólidas con el mismo volumen que la original. Obviamente, la prueba que ofrecen es puramente existencial: no nos dice cómo fragmentar la esfera unitaria para hacer que esto suceda, sino que, por el contrario, sólo asegura, con base en el axioma de elección, que tal partición existe.

Por derecho propio, el axioma es un representante de esta nueva matemática que no se preocupa demasiado por el origen de sus conceptos ni por la posibilidad de su construcción.[1] Pero tiene otro aspecto muy interesante que pone de manifiesto el desacuerdo que se puede producir entre la evidencia intuitiva y la certeza racional. Hace poco Jerry Bona escribió: ‘‘El axioma de elección es obviamente verdadero, el principio del buen orden es obviamente falso y ¿quién podría decir algo acerca del lema de Zorn?’’.[véase: http://www.math.vanderbilt.edu /~schectex/ccc/choice.html]. Con ironía, Bona pone al descubierto un hecho significativo: el paradójico desacuerdo de nuestra intuición intelectual con la lógica. En el marco de la teoría ordinaria de conjuntos estos tres principios son equivalentes: si postulamos uno de ellos, podemos demostrar los otros dos. No obstante este es el fondo irónico del comentario, nuestra intuición no siempre otorga el mismo grado de

1. Son muchos los teoremas que se han probado con base en este axioma. Algunos ejemplos son los siguientes: 1**.** El teorema de Tychonoff en topología: el producto de espacios topológicos compactos es compacto; 2**.** El teorema de que todo espacio vectorial tiene una base; 3**.** El teorema del buen orden: todo conjunto no vacío se puede bien ordenar; 4**.** El teorema de que todo subgrupo de un grupo libre es libre; 5**.** El teorema de que todo anillo tiene un ideal máximo; 6**.** El teorema de representación de Stone: toda álgebra booleana es isomorfa a algún álgebra booleana de conjuntos; 7**.** El teorema Schröder-Bernstein: todos los números cardinales son comparables entre sí.

evidencia a las cosas que, según el encadenamiento lógico, son equivalentes. Así, tal como lo advierte Bona, el axioma de elección concuerda con la intuición de muchos matemáticos; el principio del buen orden discuerda con la intuición de muchos matemáticos, y el lema de Zorn es tan complicado que una gran mayoría no logra formarse ninguna opinión intuitiva acerca de él.

Comentario final

La matemática moderna ha incorporado nuevos métodos y principios de prueba en torno a los cuales se han producido enconados debates. La demostración, ¿es tan sólo un argumento formal sujeto a reglas precisas?; de ser así, ¿cuáles son estas reglas?; ¿no es acaso el propósito de la demostración 'comunicar' convicción? Estas cuestiones están lejos de tener una respuesta definitiva. Es de esperarse que la prueba matemática sea universal; no obstante, en la practica ordinaria no lo es, a pesar de la aparente unidad de esta disciplina. Recientemente, la aparición de dos nuevos frentes ha polarizado aún más la polémica: nos referimos, por una parte, a la demostración automática de teoremas; por la otra, a la naciente tendencia a basar la matemática en el razonamiento intuitivo sin demostración [véase: Jaffe y Quinn 1993]. Con esta simple observación damos fin a este trabajo, en el que esperamos haber puesto en claro que cualquier respuesta que se dé a la pregunta por los métodos de prueba de la matemática presupone una toma de posición en torno a la naturaleza y función de esta disciplina.

Referencias

BOCHENSKI, Inocenty M. 1955. *Formale Logik.* Friburgo-Munich, K. Alber.

CARNAP, Rudolf. 1935. *Le probleme de la logique de la science, science formelle et science du réel*. París: Hermann. Traducción al francés

EUCLIDES, *Elementos*, (introducción de Luis Vega, versión de María Luisa Puertas), Madrid: Biblioteca Clásica Gredos, Tomo I (libros I-IV), 1991; Tomo II (libros V-IX), 1994; Tomo 3 (libros X-XIII), 1996.

HEATH, T. L. 1956. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications Inc. 3 Vols.

HILBERT, David. 1993. ''El pensamiento axiomático''. Traducción al español de Luis Felipe Segura, en David Hilbert. *Fundamentos de las Matemáticas.* México: UNAM (Col. Mathema), 1993. pp. 22-35.

JAFFE, A. y Quinn, F. 1993. “'Theoretical mathematics': Toward a cultural syntesis of mathematics and theoretical physics.” *Bulletin of the American Mathematical Society* (2) **29**: 1-13.

KANT, Immanuel. 1978. *Crítica de la razón pura*. Madrid: Alfaguara (versión de Pedro Ribas).

KLINE, Morris. 1994. *El pensamiento matemático desde la Antigüedad a nuestros días*, Madrid: Alianza Editorial. 3 vols.