# Sobre una pregunta elemental de la teoría de conjuntos

*George Cantor*

En el artículo titulado: *Sobre una propiedad de la unión de todos los números reales algebraicos*, Journ. Math., tomo 77, pág. 258, se encuentra por primera vez una demostración para la proposición que existen conjuntos infinitos que no se dejan relacionar de modo recíproco y unívoco con la totalidad de los números enteros finitos 1, 2, 3, ... $n$, ... De lo demostrado en el §2 se sigue sin más, que por ejemplo la totalidad de los números reales de un intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ *no* se deja representar en la forma

$$w_1, w_2, \ldots, w_v, \ldots$$

Pero se puede dar una demostración más sencilla de esa proposición, que es independiente de la consideración de los números irracionales.

Sean $m$ y $w$ cualesquiera dos caracteres ajenos, consideremos la unión $M$ de elementos

$$E = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

que dependen de una cantidad infinita de coordenadas, donde cada una de estas coordenadas, es o bien $m$ o bien $w$. $M$ es la totalidad de esos elementos $E$.

A los elementos de $M$ le corresponden, por ejemplo, los siguientes:

$$E^{\mathrm{I}} = (m, m, m, m \ldots)$$
$$E^{\mathrm{II}} = (w, w, w, w \ldots)$$
$$E^{\mathrm{III}} = (m, w, m, w, \ldots)$$

* Publicado por primera vez en el *Anuario de la Deutsch Math. Vereing,* tomo I, pp., 75-78.

Afirmo ahora que el conjunto $M$ no tiene la potencia de la serie 1, 2, ..., $n$, ...

Esto se desprende de la siguiente proposición:

Si $E1, E2, \ldots, En, \ldots$ es una serie infinita simple cualquiera de elementos del conjunto $M$, entonces hay un elemento $E_0$ de $M$ que no coincide con ningún $E_n$.

Sea por ejemplo:

$$E_1 = (a_{1,1},\ a_{1,2},\ \ldots\ a_{1,\tau},\ \ldots)$$

$$E_2 = (a_{2,1},\ a_{2,2},\ \ldots\ a_{2,\tau},\ \ldots)$$

.................................

$$E_\mu = (a_{\mu,1},\ a_{\mu,2},\ \ldots,\ a_{\mu,\tau},\ \ldots)$$

Aquí las $a_{\mu,\tau}$ son de alguna manera $m$ o $w$. Se define ahora una serie $b_1, b_2, \ldots, b_\tau, \ldots$ de modo que $b_\tau$ sea sólo igual a $m$ o $w$ y sea distinto de $a_{\mu,\mu}$.

Entonces si $a_{\mu,\mu} = m$, $b_\mu = w$, y si $a_{\mu,\mu} = w$, $b_\mu = m$

Observemos entonces al elemento

$$E_0 = (b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots)$$

de $M$. Se ve sin más que la igualdad

$$E_0 = E_\mu$$

no puede darse para ningún valor entero positivo $\mu$, ya que de otro modo para el $\mu$ concerniente y para todo valor entero $\tau$

$$b_\tau = a_{\tau,\tau}$$

y también en especial sería

$$b_\mu = a_{\mu,\mu}$$

lo cual está excluido en la definición de $b_\tau$. De esta proposición se sigue de inmediato que la totalidad de elemento de $M$ no se deja poner en la forma de una serie $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ ya que de otro modo estaríamos frente a la contradicción, que una cosa $E_0$ sería simultáneamente elemento de $M$ y no elemento de $M$.

Esta demostración aparece no nada más por su gran sencillez, sino que particularmente también por la notable razón, de que el principio que de ella se sigue se deja extender a la proposición general, de que las potencias de conjuntos bien definidos no tienen un máximo, o lo que es lo mismo, que a cada conjunto $L$ se le puede poner junto otro $M$, el cual es de potencia mayor que $L$.

Sea por ejemplo, $L$ un continuo lineal, digamos la totalidad de los números reales $z \geqq 0$ y $\leqq 1$.

Se entenderá por $M$ la totalidad de todas las funciones $f(x)$ unívocas, que sólo toman los valores 0 o 1, mientras que $x$ recorre todos los valores reales $\geqq 0$ y $\leqq 1$.

Que $M$ no tiene *ninguna* potencia *menor* que $L$ se sigue de que se pueden tomar subconjuntos de $M$ que tienen la misma potencia que $L$; por ejemplo, el subconjunto que consta de todas aquellas funciones que para un solo valor $x_0$ de $x$ tienen el valor 1 y para todos los otros valores de $x$ tienen el valor 0.

Pero $M$ *no* tiene *la misma* potencia que $L$, ya que de otro modo, el conjunto $M$ se dejaría acomodar en relación recíproca y unívoca con las variables $z$ y se podría pensar a $M$ en la forma de una función unívoca en ambas variables $x$ y $z$

$$\Phi(x, z),$$

de modo que para cada especialización de $z$ se obtendrá un elemento $f(x) = \Phi(x, z)$ de $M$ y viceversa, cada elemento $f(x)$ de $M$ es consecuencia de una única determinada especialización de $z$ en $\Phi(x, z)$. Pero esto conduce a una contradicción. Ya que si entendemos bajo $g(x)$ aquella función unívoca de $x$, que sólo toma los valores 0 o 1 y tal que para cada valor $x$ es distinta de $\Phi(x, x)$, entonces, por un lado $g(x)$ es un elemento de $M$ y por otro lado $g(x)$ no puede, bajo ninguna especialización de $z = z_0$ ser consecuencia de $\Phi(x, z)$ ya que $\Phi(z_0, z_0)$ es distinta de $g(z_0)$.

Con esto, la potencia de $M$ no puede ser ni menor ni igual a la de $L$, se sigue que es mayor a la potencia de $L$ (*cfr. Crelles Journal*, t. 84, p. 242).

Recientemente he mostrado en *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos* (Leipzig, 1883, *Anales matemáticos*, t. 21) mediante recursos bien distintos, que las potencias no tienen máximo; allí hasta se demostró que la totalidad de todas las potencias, si las pensamos ordenadas según su tamaño, forman un "conjunto bien ordenado", de modo que en la naturaleza para cada potencia hay una siguiente mayor, pero también para un conjunto creciente sin fin de potencias le sucede una siguiente mayor.

Las "potencias" representan la generalización única y esencial de los "números cardinales" finitos, no son sino los números cardinales actualmente-infinitamente-grandes, y les corresponde la misma realidad y determinación como a las otras; nada más que las relaciones formales entre ellas, la "teoría de números" relativa a ellas, en parte es de otro modo que en el dominio de lo finito.

La conclusión posterior de este campo es tarea del futuro.