*Mathesis* **III 2$_2$** (2007) 279-299.


# El teorema del valor medio del cálculo diferencial

*Jacobo G. Núñez Urías*

**RESUMEN**

En este trabajo hacemos una revisión histórica del *Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial*, desde la publicación de éste en los escritos de Cauchy, pasando por algunas demostraciones aparecidas en el *American Mathematical Monthly*, poniendo énfasis en el carácter evolutivo de la disciplina, en donde importa, no sólo el propósito de un autor al presentar una demostración, sino, las posibles lecturas que se pueden hacer de lo escrito. Recreamos algunas demostraciones de éste y de otros resultados relacionados, mostrando cómo a partir del texto o de la demostración del resultado, se pueden desencadenar otras formas de interpretación, de expresión o generalización.

**ABSTRACT**

In this text we historically review the *Mean Value Theorem from Differential Calculus*, since its publication on Cauchy's writings, as well as several other demonstrations that appeared over the years on the *American Mathematical Monthly*, focusing on the evolutive character of the subject, in which what it is important is not just the purpose of the author on presenting such a proof, but an interpretation of the possible readings that can be made of it. We recreate some demonstrations of the aforementioned theorem and of some other results related to it, showing how, starting from the setting of the theorem or from its proof, it is possible to unveil several other ways of interpreting it, of settling it or generalizing it.

*Para evitar cualquier especie de confusión*
*en el lenguaje y la escritura algebraicos, vamos*
*a fijar en estos preliminares el significado de varios*
*términos y de varias notaciones que tomaremos*
*ya sea del álgebra ordinaria o de la trigonometría.*
*Las explicaciones que daremos son necesarias*
*para tener la certeza de ser perfectamente*
*comprendidos por quienes leerán la obra.*
Augustin Louis Cauchy

## 1. Introducción

Desde el punto de vista de la estructura lógica de la matemática, un 'teorema' se basa en ideas, conceptos y resultados de la misma disciplina, que en un momento determinado la comunidad matemática comparte. Esto es sabido desde el reconocimiento mismo de la disciplina como ciencia deductiva. Pero, las formas de expresión de los teoremas, sus demostraciones y las formas de interpretación que de ellos se haga, no han sido siempre las mismas, y en ocasiones, formas distintas de interpretación pueden desencadenar nuevas formas de demostración y de expresión del mismo resultado.

Lo anterior es aplicable al *Teorema del Valor Medio*, aún en su versión real de variable real, esto sin considerar versiones del resultado más generales en espacios más abstractos, valga como información, que únicamente en el *American Mathematical Monthly* se han publicado más de doscientos artículos relacionados con el mencionado teorema en los últimos cien años.

No está por demás recordar que este resultado es uno de los más importantes del cálculo, ya que a partir de éste, se pueden definir otros conceptos como el de la integral de funciones reales, deducir una gran cantidad de resultados del análisis numérico y del mismo cálculo, como el *Teorema del Valor Medio de la Integral*, la regla de L´Hôpital, entre otros. Cualquier profesor de cálculo, conoce el resultado y sabe que una demostración la puede consultar casi en cualquier libro de texto de cálculo o de análisis.

Presentaremos en el desarrollo del escrito las formas actuales de su demostración, haciendo comparaciones entre ellas, mostraremos una parte de la evolución del resultado, reconstruiremos una demostración la cual permite no sólo su generalización sino también otras formas de interpretación, tanto del texto del teorema como de sus demostraciones. Todo esto acompañado de algunas reflexiones y comentarios que posiblemente pasamos por alto y que pueden ser de utilidad tanto a los profesores de la materia, como a los interesados en el estudio de este tipo de tópicos.

## 2. Antecedentes

En la parte final de la séptima lección de las *Lecciones de cálculo infinitesimal***,** Cauchy afirma [1994, 259-262]:

> Vamos a dar a conocer una relación digna de ser observada[1] y que existe entre la derivada $f'(x)$ de una función arbitraria $f(x)$ y la razón de las diferencias finitas
>
> $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
>
> [...]. Dicho esto, se establecerá sin dificultad la proposición siguiente.
>
> Teorema.- Si la función $f(x)$ es continua entre los límites $x = x_0$, $x = X$ y si se designa con $A$ al valor más pequeño y con $B$ al valor más grande de la función derivada $f'(x)$ en ese intervalo la razón de las diferencias finitas
>
> $$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0} \tag{4}$$
>
> estará necesariamente comprendido entre $A$ y $B$.
> [...].
>
> Corolario.-
> Si la función derivada $f'(x)$ es también continua entre los límites $x = x_0$, $x = X$ al pasar de un límite al otro esta función variará de tal modo que permanece siempre entre los dos valores $A$ y $B$ y toma todos los valores intermedios. Así, cualquier cantidad media entre $A$ y $B$ será un valor de $f'(x)$ que corresponde a un valor de $x$ entre los límites $x_0$ y $X = x_0 + h$, o igualmente, a un valor de $x$ de la forma
>
> $$x_0 + \theta h = x_0 + \theta(X - x_0)$$
>
> donde $\theta$ designa a un número menor que la unidad.
> Al aplicar esta observación a la expresión (4), se concluirá que existe entre los límites 0 y 1 un valor de $\theta$ capaz de verificar la ecuación
>
> $$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0} = f'(x_0 + \theta(X-x_0)) \tag{5}$$
>
> o, lo que es lo mismo, la siguiente
>
> $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0+\theta h) \tag{6}$$
>
> Esta última fórmula deberá subsistir, cualquiera que sea el valor de $x$ representado por $x_0$, siempre y cuando la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ permanezcan continuas entre los valores extremos $x = x_0$, $x = x_0 + h$. Se tendrá generalmente bajo esta condición

1. Se puede consultar sobre este punto una Memoria de M. Ampere en el reporte XIII del *Journal de l´École Polytechnique* [Nota de Cauchy].

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\theta h) \tag{7}$$

Además, al escribir $\Delta x$ en lugar de $h$, se obtendrá

$$f(x+\Delta x)-f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\,\Delta x \tag{8}$$

Es importante observar que en las ecuaciones (7) y (8), $\theta$ designa siempre a un número desconocido pero menor que la unidad.

Observaciones a la cita: Podemos apreciar (en el pié de página) el reconocimiento de Cauchy a Ampere sobre la primacía del resultado. También podemos apreciar que los objetos de discusión son las funciones y sus propiedades, en donde se combinan expresiones simbólicas acompañadas de un discurso textual explicativo, pero sin referencia alguna a diagramas o interpretación geométrica que pretenda ilustrar lo que el resultado afirma. Esto es común en la obra *Cursos de Análisis* de Cauchy, de la cual las 'lecciones' son sólo una parte, y esto tiene que ver con la intención del autor de escribir los fundamentos del cálculo, en donde no tienen cabida nociones o ideas que se apoyen en intuiciones o cuestiones geométricas; es decir, de lo que se trata es de introducir el rigor en el análisis, y su forma de expresión es el lenguaje simbólico.

Reconocemos en el extenso corolario, una forma de expresión del *Teorema del Valor Medio*, y una argumentación discutible y dudosa. Discutible, porque supone la hipótesis de continuidad en la función derivada; y dudosa, porque la argumentación se apoya en resultados o propiedades de las funciones continuas, que suponemos fueron presentados y probados muchos años después, como son: El *Teorema de Weierstrass* (toda función continua en un intervalo cerrado alcanza el supremo y el ínfimo), y la propiedad de Darboux (toda función continua en un cerrado, toma todos los valores entre dos valores cualesquiera de la función). Estos resultados, forman parte de las conclusiones de un largo proceso de reconstrucción de los fundamentos del cálculo, que se realizó durante todo el siglo XIX.

Apreciamos también, en la última expresión simbólica, una expresión útil para introducir la integral como una suma de diferencias, sin referencia alguna al área bajo la curva, y apuntala de paso, al *Teorema Fundamental del Cálculo*, pero esto es otra historia.

## 3. Las versiones actuales

El *Teorema del Valor Medio*, también conocido como *Teorema de Lagrange*, se puede escribir en la siguiente forma:

Teorema 1. Sea $f$:[$a$,$b$] $\rightarrow \Re$, continua en el cerrado [$a$,$b$] y derivable en el abierto ($a$,$b$). Entonces existe $\xi \in (a,b)$, tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o en forma equivalente:

$$f'(\xi)\ (b - a) = f(b) - f(a).$$

Su demostración se apoya en el siguiente teorema:
Teorema 2. (*Teorema de Rolle*) Sea $f$:[$a$,$b$]$\rightarrow \Re$, continua en el cerrado [$a$,$b$] y derivable en el abierto ($a$,$b$), y tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $\xi \in (a,b)$, tal que

$$f'(\xi) = 0$$

El siguiente teorema es una generalización del *Teorema de Lagrange*, conocido como *Teorema de Cauchy*:
Teorema 3. (*Teorema del Valor medio Generalizado*). Sean $F$ y $G$ continuas en el cerrado [$a$, $b$] y diferenciables en el abierto ($a$, $b$), si $G(a) \neq G(b)$ y $F'$ y $G'$ no se anulan simultáneamente, entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\frac{F(b) - f(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

o en forma equivalente:

$$[F(b) - F(a)]G'(\xi) = F'(\xi)\ [G(b) - G(a)].$$

**4. Esquema general de las demostraciones**

Tanto la demostración del *Teorema del Valor Medio* como la del *Teorema del Valor Medio Generalizado* se apoyan en la aplicación del *Teorema de Rolle*. El esquema consiste en buscar o construir una 'adecuada función', a la que se le aplica el *Teorema de Rolle*, para obtener el resultado deseado, recordemos este esquema:

Demostración 1
Para demostrar el *Teorema del Valor Medio*, se considera la función:

$$\phi(x) = f(x) - [\,\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x-a) + f(a)]$$

$\phi(x)$ es continua en el cerrado y derivable en el abierto $y\ \phi(a) = \phi(b)$.

Por lo que existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\phi'(\xi) = 0$$

de donde

$$\phi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

y así

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración 2

Una demostración más simple que la anterior se logra al aplicar el Teorema 2 a la función

$$\phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, x$$

$\phi(x)$ es continua en el cerrado y derivable en el abierto *y* $\phi(a) = \phi(b)$, por lo que existe $\xi \in (a, b)$, tal que

$$\phi'(\xi) = 0$$

de donde

$$\phi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

y, así,

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Al seguir el esquema de la demostración 1 se puede demostrar el *Teorema del Valor Medio Generalizado.*

Demostración 3

Se definen

$$K = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)}$$

y

$$\phi(x) = F(x) - [K(G(x) - G(a)) + F(a)].$$

Entonces, como $\phi(a) = \phi(b)$

$$\phi'(x) = F'(x) - KG'(x).$$

Por el *Teorema de Rolle*, existe $\xi \in (a,b)$, tal que

$$0 = \phi'(\xi) = F'(\xi) - KG'(\xi)$$

de donde

$$K = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

Es decir,

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

Observación: Si en la conclusión del Teorema 3, tomamos $G(x) = x$, obtenemos el *Teorema del Valor Medio*.

Demostración 4

Al seguir el esquema de la demostración 2, también podemos obtener una demostración más simple del *Teorema del Valor Medio Generalizado*, al definir:

$$K = \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} \quad \text{y} \quad \phi(x) = F(x) - KG(x)$$

y repetir exactamente el esquema de la demostración 3.

Comentarios a las demostraciones

En las últimas dos demostraciones, la función $\phi$, a la que se le aplica el *Teorema de Rolle*, se obtiene de la repetición del esquema de la demostración anterior. Hemos dicho que la demostración 2 es más simple que la demostración 1, porque la expresión de la función auxiliar $\phi$, es más simple, por lo menos, en su expresión algebraica, que la utilizada en la demostración 1. Pero, lo que no se menciona en ninguna de las demostraciones, es la ocurrencia o la forma de construir la función auxiliar $\phi$.

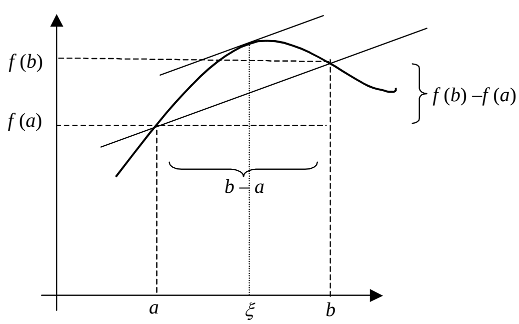
**5. La representación geométrica de los teoremas**

Para dar una interpretación geométrica del teorema o de su demostración, se requiere hacer una conversión de los objetos que están en juego y describir el teorema o el proceso de demostración, en otros términos. Por ejemplo, en el *Teorema del Valor Medio*, la función real de variable real, se representa por medio de una curva en el plano, la característica de ser derivable en cada *x* en el abierto, la interpretamos con el hecho de que la curva admite una recta tangente en cada punto, excepto en los extremos, y la expresión simbólica de la conclusión escrita por medio de una igualdad, con la afirmación de que siempre existe un punto intermedio donde la derivada en ese punto está determinada por los extremos y los valores de la función en esos extremos. Si somos más específicos con la conclusión del resultado, entonces se puede ‘describir’ en los siguientes términos (o en otros que se le ocurran al lector): Para una función continua en un intervalo cerrado y derivable en el abierto, siempre existe un punto intermedio en el cual, la derivada en ese punto es igual a la pendiente de la secante que une a los extremos.

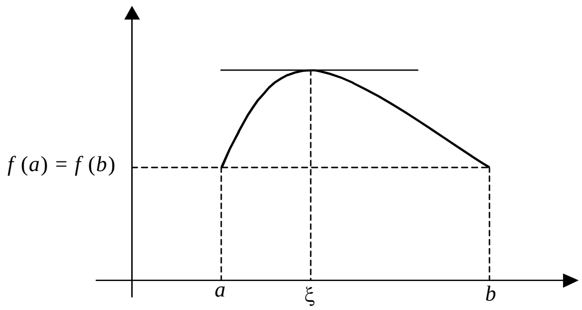
En una curva continua, siempre hay un punto intermedio en la curva, cuya tangente tiene una inclinación igual a la secante que une sus extremos. En una trayectoria, siempre hay un punto intermedio donde el vector tangente es paralelo al vector que une a los extremos. Para cualquier curva ‘suave’, y cualquier par de puntos de la curva, siempre existe al menos un punto ‘intermedio’ en la curva, en el cual su pendiente es igual a la del segmento que une al par de puntos de la curva.

De las descripciones anteriores, ¿hay alguna razón para dudar de que el resultado sea válido para curvas en el espacio? Volveremos a esta cuestión más adelante.

Para ‘ilustrar’ las ‘descripciones’ anteriores, o para ilustrar el texto de los Teoremas 1 y 2, podemos hacer uso de gráficas como las siguientes:



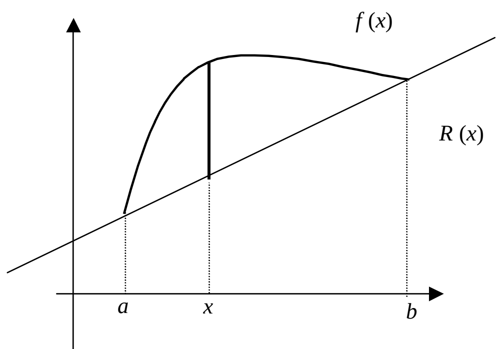

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$




$f\,'(\xi) = 0$

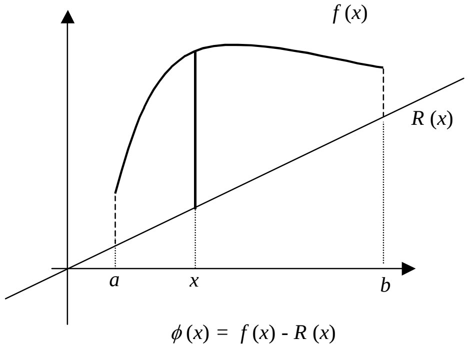
Evidentemente, no es lo mismo 'el texto' del teorema, 'la descripción' del resultado y 'la gráfica' que lo ilustra, pero, cada una de ellas son partes complementarias que pueden servir o permiten tener una visión más general y completa del resultado y su demostración.

En la demostración 1 del *Teorema del Valor Medio*, la función $\phi$ tiene la 'interpretación geométrica' de ser la función que para cada $x$, mide la longitud del segmento que hay entre la función $f$ y la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ *y* $(b, f(b))$, como lo 'muestra' la siguiente gráfica




$\phi(x) = f(x) - R(x)$

En el caso de la demostración 2 del *Teorema del Valor Medio*, la función $\phi$ tiene la 'interpretación geométrica' de ser una función que para cada $x$, mide la longitud del segmento que hay entre la función $f$ y la recta que pasa por el origen con pendiente igual a la recta que pasa por los dos puntos $(a, f(a))$ *y* $(b, f(b))$, podemos 'ilustrar' con la siguiente gráfica:




$\phi(x) = f(x) - R(x)$

**6. Una revisión del teorema**

La primera publicación del siglo pasado del *American Mathematical Monthly*, que hace referencia al *Teorema del Valor Medio*, es un artículo de Bennet (1924), en donde el autor se manifiesta por buscar acercamientos didácticos para las demostraciones del *Teorema del Valor Medio* y del *Teorema del Valor Medio Generalizado*. Al retomar las ideas de Bennett, Putney (1953) publica una demostración del *Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral*. Entre otras publicaciones, en la misma revista, que buscan enfoques en donde se justifique el origen y papel de la función auxiliar que se emplea en la demostración del *Teorema del Valor Medio*, podemos mencionar los artículos de Spiegel (1956),Yates (1959), Evans (1960), Barrett y Jacobson (1960) y Barret (1962).

En particular, nos interesa retomar el trabajo de Bennett, ya que en éste se encuentra la clave para cambiar el esquema de la demostración y obtener una generalización del resultado. En relación al esquema de demostración, el autor afirma:

> Estas funciones son justificadas por el hecho de que ellas sirven para establecer el teorema deseado como consecuencia de un teorema conocido, pero no son sicológicamente motivadas. […]. No hay necesidad de tal artificialidad y en el caso del *Teorema de Lagrange* no hay excusa.

En relación a la ausencia en los textos, de una interpretación geométrica del *Teorema de Cauchy*, el autor afirma:

> En el caso del Teorema de Cauchy el silencio es unánime. Esto es más sorprendente puesto que se puede dar la misma interpretación geométrica como la anterior, usando la variable independiente como parámetro. Si $f(t)$ es llamada $y$ y $g(t)$ es $x$, El *Teorema de Cauchy* como el teorema de Lagrange (aunque ahora aplicable a una clase más amplia de curvas)

establece que existe un punto en el arco para el cual la tangente es paralela a la cuerda.

Con la pretensión de escribir expresiones algebraicas más fáciles de ser recordadas, que engloben los dos resultados, y explicar o justificar de dónde se obtienen las funciones en las que se apoya la demostración, el autor afirma:

Pudiéramos escribir la conclusión del *Teorema de Cauchy* en la siguiente forma algebraica simétrica: Existe al menos un $\xi$ entre $a$ y $b$ tal que

$$\begin{vmatrix} x'(\xi) & y'(\xi) & 0 \\ x(a) & y(a) & 1 \\ x(b) & y(b) & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

esto pudiera compararse con la forma más usual e identificarla. O pudiera ser verificado directamente del primer principio de la geometría analítica de vectores del plano como la condición de que el vector infinitesimal del origen a $(x'(\xi), y'(\xi))$ será paralelo a la línea que une a $(x(a), y(a))$ con $(x(b), y(b))$. Es obvio que la expresión (1) es de la forma $F'(\xi) = 0$, donde $F(t)$ satisface la condición

$$F(t) = \begin{vmatrix} x(t) & y(t) & 1 \\ x(a) & y(a) & 1 \\ x(b) & y(b) & 1 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Esto se convierte, de cara a las cosas, en una de las funciones lo más simple posible involucrando funciones arbitrarias $x(t)$ y $y(t)$ las cuales se anulan para $t = a$ y $t = b$ como el *Teorema de Rolle* lo requiere.

Es claro de la forma de la demostración que en lugar de tomar (2) pudimos haber tomado

$$F(t) = \begin{vmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \\ x(a) & y(a) & z(a) \\ x(b) & y(b) & z(b) \end{vmatrix}.$$

Observaciones a la cita anterior. El hecho de que la función $F(t)$, a la que se le aplica el *Teorema de Rolle*, tenga la expresión de un determinante, tiene consecuencias importantes, que pasamos a comentar: Al hacer una combinación entre argumentos algebraicos, basados en propiedades de los determinantes o basados en la expresión de la función, y apoyados en interpretaciones geométricas, podemos obtener las conclusiones de los resultados en cuestión.

1) La expresión del determinante, remite al hecho geométrico de que para cada $t$, la función determinante mide dos veces el área de del trián-

gulo formado por los puntos *A P B*, o si se prefiere, el área del paralelogramo determinado por tres puntos, donde

$$A = F(a),\ P = f(t),\ y\ B = f(b).$$

En el caso de $t = a$, o $t = b$, el determinante vale cero, puesto que tiene dos renglones iguales, es decir $F(a) = F(b) = 0$, o también puede obtenerse algebraicamente al sustituir estos valores en la expresión de la función, y como al desarrollar el determinante la expresión de la función es de la forma:

$$F(t) = k_1 x(t) + k_2 y(t) + k_3$$

La cual cumple con las condiciones del *Teorema de Rolle*; al aplicarlo, se obtiene la conclusión del *Teorema del Valor Medio Generalizado* de Cauchy

$$x'(\xi)\,[y(b) - y(a)\,] = y'(\xi)[x(b) - x(a)]$$

2) Si la expresión del determinante la escribimos en la forma:

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}.$$

Y, al seguir el esquema de interpretación y argumentación anterior, obtendremos la conclusión del *Teorema de Lagrange:*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(\,b - a).$$

3) Al tomar en cuenta el último párrafo de la cita anterior, obtendremos la versión del *Teorema del Valor Medio* para curvas en el espacio. Veamos este último desarrollo con detalle: Una curva en el espacio la podemos representar por medio de la expresión:

$$C(t) = (\,x(t), y(t), z(t)).$$

Si llamamos $C(a) = A$, $C(b) = B$ y para cada $t$, $C(t) = P$, e imaginamos los tres vectores, anclados en el origen, la expresión auxiliar a la que se le aplica el *Teorema de Rolle*

$$F(t) = \begin{vmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \\ x(a) & y(a) & z(a) \\ x(b) & y(b) & z(b) \end{vmatrix}$$

representa algebraicamente, a la expresión que representa geométricamente, el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $A$, $B$ y $P$.

Como en el caso anterior, si $t = a$ o $t = b$, $F(t) = 0$, el argumento algebraico es que la expresión del determinante tiene dos renglones iguales, el argumento geométrico es que el vector $P$ coincidiría con $A$ o $B$, y el argumento algebraico-vectorial es porque $(A\times B)P = 0$ si $P$ coincide con $A$ o $B$.

Si desarrollamos el determinante, la expresión de la función es de la forma:

$$F(t) = k_1 x(t) + k_2 y(t) + k_3 z(t)$$

la cual satisface las condiciones del *Teorema de Rolle*, y al aplicarlo, toma la forma:

$$x(a)[y(b)\, z'(\xi) - z(b)\, y'(\xi)] + z(a)[x(b)\, y'(\xi) - y(b)\, x'(\xi)] = y(a)[x(b)\, z'(\xi) - z(b)\, x'(\xi)]$$

o en forma equivalente:

$$x'(\xi)[y(a)\, z(b) - y(b)\, z(a)] - y'(\xi)[x(a)\, z(b) - x(b)\, z(a)] = -z'(\xi)[x(a)\, y(b) - x(b)y(a)]$$

la cual es la conclusión del *Teorema del Valor Medio* para tres funciones reales de variable real.

Con una breve modificación en los argumentos, podemos expresar en forma vectorial dos de los resultados anteriores: La forma vectorial del *Teorema del Valor Medio* para curvas en el plano. Si tenemos una curva en el plano definida paramétricamente por

$$C(t) = (x(t), y(t), 0)$$

donde las funciones componentes son continuas en el cerrado $[a,b]$ y derivables en el abierto $(a,b)$. Designemos por $C(a) = (x(a), y(a), 0\,) = A$ y $C(b) = (x(b), y(b), 0\,) = B$, $A$ y $B$ representan vectores en el plano. Si designamos por $K$, al vector constante que va de $A$ a $B$

$$K = (x(b) - x(a), y(b) - y(a), 0)$$

Y al vector variable $V$ que une a $A$ con $P$, donde $P$ es cualquier punto de la curva

$$V(t) = (\,x(t) - x(a), y(t) - y(a), 0).$$

El vector

$$K\times V(t) = (0, 0, (x(b) - x(a))\,(\,y(t) - y(a)) - (x(t) - x(a))\,(y(b) - y(a))$$

cuya magnitud es

$$F(t) = (x(b) - x(a))\,( y(t) – y(a)) – (x(t) – x(a))\,(y(b) – y(a))$$

la cual corresponde a la expresión que es dos veces el área del triángulo *APB*. De donde, al aplicarle el *Teorema de Rolle*, se obtiene la ley media extendida, la cual asegura que existe al menos un ξ tal que

$$x'(\xi)( y(b) – y(a)) = y'(\xi)( x(b) – x(a))$$

**7. *El Teorema del Valor Medio* para curvas en el espacio**

Si seguimos el esquema de la prueba anterior, obtendremos la expresión de la ley media para curvas en el espacio: Si tenemos una curva en el espacio, representada paramétricamente por

$$F(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

donde las funciones componentes son continuas en el cerrado $[a,b]$ y derivables en el abierto $(a,b)$. Designemos por

$$F(a) = (x(a), y(a), z(a) ) = A \;\text{ y }\; F(b) = (x(b), y(b), z(b) ) = B.$$

En este caso *A* y *B* representan vectores en el espacio. Si designamos al vector constante que une a *A* con *B* por

$$K = (x(b) – x(a), y(b) – y(a), z(b) – z(a)),$$

y al vector variable que une a *A* con *P* por

$$V(t) = ( x(t) – x(a), y(t) – y(a), z(t) – z(a))$$

la magnitud del vector $K\times V(t)$ es el volumen del paralelogramo determinado por los vectores *A, B y P*, que también es la mitad del área del triángulo *APB* y puede ser expresado mediante

$$F(t) = \begin{vmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \\ x(a) & y(a) & z(a) \\ x(b) & y(b) & z(b) \end{vmatrix}$$

o

$$F(t) = x(t)[y(a)z(b) – y(b)z(a)] – y(t)[ x(a)z(b) – x(b)z(a)] + z(t)[x(a)z(b) – x(b)y(a)]$$

y, al aplicarle el *Teorema de Rolle*, se obtiene la ley media extendida. La cual asegura que existe al menos un ξ tal que

$$x'(\xi)[y(a)\, z(b) – y(b)\, z(a)] - y'(\xi)[x(a)\, z(b) – x(b)\, z(a)] = -z'(\xi)[x(a)\, y(b) – x(b)y(a)].$$

Al seguir el orden de las observaciones anteriores, el texto de los respectivos teoremas se convierten en:

*Teorema.* Si $x(t)$ y $y(t)$ son continuas en $[a,b]$ y derivables en $(a,b)$ entonces existe al menos un $\xi \in (a,b)$ tal que

$$x'(\xi)\,[y(b) - y(a)\,] = y'(\xi)[x(b) - x(a)].$$

*Teorema.* Sea $f{:}[a,b]\to\Re$, continua en el cerrado y derivable en el abierto $(a,b)$, entonces existe $\xi \in (a,b)$, tal que

$$f'(\xi)\,(b - a) = f(b) - f(a).$$

*Teorema.* Si $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son continuas en $[a,b]$ y derivables en $(a,b)$ entonces existe al menos un $\xi \in (a,b)$, tal que

$$x'(\xi)[y(a)\,z(b) - y(b)\,z(a)] - y'(\xi)[x(a)\,z(b) - x(b)\,z(a)] = -z'(\xi)[x(a)\,y(b) - x(b)y(a)].$$

**8. Comentarios a los textos de los teoremas**

Si reordenamos los textos de los teoremas, por el número de funciones reales de variable real, que cumplen con las condiciones del *Teorema de Rolle*, entonces las conclusiones se convierten en una 'ley media' algebraica. En los textos de los teoremas anteriores, no se supone que las funciones involucradas sean las componentes de las parametrizaciones de las curvas que representan y que juegan un papel muy importante de guía en el desarrollo de la demostración, lo que muestra que el lenguaje algebraico-simbólico utilizado en la escritura de los teoremas, sintetiza y rebasa a las interpretaciones geométricas, pero estas últimas, tienen un lugar fundamental en la demostración, que incluso, permiten darle una nueva lectura e interpretación al texto del teorema, que a su vez rebasa a la simple lectura de una 'ley media' algebraica.

Esto muestra que las formas de expresión, tanto en el texto del teorema como en la demostración se influyen mutuamente para que se hagan lecturas distintas de ellos.

**9. Consecuencia del teorema para curvas en el espacio**

Si retomamos las 'descripciones' que hicimos del Teorema 1, no había razón alguna para dudar que el resultado pudiera ser válido para curvas en el espacio. Sin embargo, al desarrollar el punto 3 de la sección anterior, o al reinterpretarla para obtener la versión del resultado para curvas en el espacio, vemos que no se cumple el resultado en los términos de la descripción, y la conclusión tampoco corresponde a una descripción fácil de expresar.

Esto nos muestra que el lenguaje algebraico puede revelarnos afirmaciones no sospechadas y que no siempre corresponden a descripciones sencillas de expresar y de explicar. Otra forma de ver (con el ojo de la mente) que el resultado no se cumple para funciones que representan curvas en el espacio, es considerar e imaginar una hélice circular, con dominio del parámetro de 0 a $2\pi$, el segmento que una a (1,0,0) con (1, 0 $2\pi$) es un segmento paralelo al eje *z*, sin embargo, ninguna tangente a la curva es paralelo al eje *z*.

El argumento algebraico, descansa en la expresión algebraica que representa a la curva. Así, una parametrización de la hélice circular es

$$F(t) = (cos\ t, sen\ t, t)$$

y su derivada es

$$F'(t) = (-sen\ t, cos\ t, 1).$$

De donde, para que $F'(t)$ represente un vector paralelo al eje *z* requerimos que

$$sen\ t = cos\ t = 0,$$

por lo que no existe tal valor de *t*.

Lo anterior es una muestra de la complementariedad de las formas de expresión y de interpretación que podemos poner en juego, en la justificación de una afirmación o de una negación, como es éste el caso.

### 10. Otra forma de obtener el *Teorema del Valor Medio*

Aunque no contamos con evidencia de que el teorema lo haya probado Lagrange, ni es prudente esperar encontrar un resultado en los términos como se expresa actualmente, podemos ver que resolver el problema de aproximar una función por medio de una función lineal, y con el auxilio del *Teorema de Rolle*, nos lleva a la conclusión del *Teorema del Valor Medio*: ¿Qué condiciones debe cumplir una función lineal para que aproxime a una función *f* ?

Tomemos la expresión de una función lineal $g(x) = A + Bx$, donde *A* y *B* son instantes por determinar. Tomemos la diferencia entre la función $f(x)$ *y* $g(x)$ y llamémosla

$$F(x) = f(x) - g(x)$$

$$F(x) = f(x) - [A + Bx]$$

Para determinar las constantes *A* y *B* de tal forma que la recta y la función sean iguales, por lo menos en dos puntos *a* y *b* muy cercanos, entonces debe cumplir que

$$F(a) = F(b) = 0.$$

Es decir,

$$F(a) = f(a) - (A + B\,a) = 0$$

$$F(b) = f(b) - (A + B\,b) = 0$$

Puesto que $F$ ‘satisface las condiciones del *Teorema de Rolle’*, entonces existe $\xi$ tal que

$$F'(\xi) = 0.$$

De donde

$$F'(\xi) = f(\xi) - B = 0 \text{ con } a < \xi < b.$$

Lo que significa que

$$f'(\xi) = B,$$

pero si resolvemos el sistema

$$F(a) = f(a) - (A + Ba) = 0$$

$$F(b) = f(b) - (A + Bb) = 0$$

para $B$, obtenemos

$$f(b) - (A + Bb) = f(a) - (A + Ba)$$

$$f(b) - f(a) = -(A + Ba) + (A + Bb)$$

$$= -B\,a + B\,b$$

$$= B(b - a)$$

de donde

$$B = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Es decir,

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Por último, vamos a presentar otro ejemplo en donde quede de manifiesto la potencia del lenguaje algebraico-simbólico y que rebasa a las interpretaciones geométricas que se pueden generar a partir de éste. Una versión apropiada del *Teorema del Valor Medio*, para funciones de varias variables con valores reales y que conserva la misma forma, tanto en el texto como en la conclusión, podemos escribirla en los términos siguientes: Sea $f$ diferenciable en todo su dominio, y tal que si $A$

y $B \in D_f$, entonces existe un punto $Z_0$ en el segmento que une $A$ con $B$ tal que

$$f(B) - f(A) = \nabla f(Z_0)(B - A)$$

Demostración

La expresión del segmento que une a $A$ con $B$ se puede escribir por medio de la función

$$g(t) = A + t(B\text{-}A) \text{ con } 0 \leq t \leq 1,$$

donde

$$g(0) = A \text{ y } g(1) = B.$$

La imagen bajo $f$, de este segmento es:

$$f(g(t)) = f(A + t(B - A)).$$

Como $f(g(t)$ es una función real de variable real, denotémosla con $F$,

$$F(t) = f(g(t)).$$

Además,

$$F(0) = f(g(0)) = f(A) \text{ y } F(1) = f(g(1)) = f(B).$$

Es decir,

$$F(0) = f(A) \text{ y } F(1) = f(B). \tag{1}$$

Si a $F$ le aplicamos el *Teorema del Valor Medio* en el intervalo $(0, 1)$, entonces el teorema nos asegura que existe $\xi \in (0, 1)$, tal que

$$F(1) - F(0) = F'(\xi)(1 - 0) = F'(\xi). \tag{2}$$

Al derivar la función $F$, y usar la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{aligned} F'(t) &= \nabla f(g(t)g'(t)) \\ &= \nabla f(g(t))(B - A)) \end{aligned}$$

Para el valor $\xi \in (0, 1)$, $g(\xi)$ será un punto en el segmento que une a $A$ con $B$, llamémoslo $Z_0$, de donde

$$\begin{aligned} F'(\xi) &= \nabla f(g(\xi)g'(t)) \\ &= \nabla f(g(\xi))(B - A) \\ F'(\xi) &= \nabla f(Z_0)(B - A). \end{aligned} \tag{3}$$

Al combinar $(1)$, $(2)$ y $(3)$, obtenemos

$$\therefore \quad f(A) - f(B) = \nabla f(Z_0)(B - A).$$

Observaciones. El lector podrá constatar la semejanza que existe entre el texto del teorema 1 y el texto del resultado anterior, pero, la connotación de los términos y las operaciones que expresan las conclusiones de ambos resultados son muy distintas.

El lector también se podrá percatar que no especificamos un valor para la dimensión $n$, por lo que la argumentación empleada en la demostración es válida independientemente del valor de $n$; sin embargo, se puede dar una interpretación geométrica para el caso $n = 2$, en la cual, por la forma de la construcción de la demostración, podemos visualizar que la curva en el espacio siempre se encuentra en un plano, pero hay que tener cuidado de no confundir esto como una prueba de que el resultado sea válido en general para curvas en el espacio.

## 11. Comentarios finales

Respecto a la conexión que hemos hecho de las dos publicaciones del *Teorema del Valor Medio*, guardando toda proporción, entre la versión del resultado dada por Cauchy y el artículo de Bennet (1924), no sólo hay una diferencia de más de cien años; también hay diferencias en la intención de los autores; hay diferencia entre el público a quien se dirigen, y lo más importante, es que median más de cien años de evolución de la disciplina, en lo que concierne a la fundamentación del Cálculo.

La publicación de los *Cursos de Análisis* de Cauchy estaba dirigida a sus estudiantes de la *Escuela Politécnica*; sin embargo, Cauchy era consciente que su obra sería leída por los grandes matemáticos de su tiempo, quienes fueron los que lo motivaron y animaron a escribir sus lecciones, por lo que también tenía el propósito explícito de escribir sobre los fundamentos del Cálculo.

Su obra tuvo tal influencia, que marcó el inicio del proceso conocido en la historia de la matemática como la Aritmetización del Análisis, el cual ocupó la atención de los especialistas todo el siglo antepasado y parte del siglo pasado; y aún en nuestros días, todavía se siente su influencia en la forma de escritura de los textos de Matemáticas.

En el caso de Bennet, su intención es mucho más modesta como lo podemos constatar en las citas que hemos recogido de su artículo; de hecho, su trabajo inaugura una sección del *American Mathematical Monthly*, dedicada a la divulgación de ideas e inquietudes entre los profesores de Matemáticas, para tratar de forma novedosa tópicos o resultados conocidos. Por lo demás, Bennet, no tuvo las intenciones o propósitos de Cauchy. Sin embargo, aún con las loables intenciones de éste, expresadas en el epígrafe que encabeza este escrito, el autor, jamás tendrá la certeza de ser perfectamente comprendido por quienes leerán su obra.

Hemos mostrado que la intención del autor de un escrito, puede generar cambios en la lectura e interpretación, motivando otras significaciones que enriquecen y complementan al escrito, lo hemos ejemplificado a través del texto del *Teorema del Valor Medio* y de su demostración.

Indudablemente que en un texto de análisis, el teorema será expresado en términos precisos, en donde las hipótesis y la conclusión serán escritas en una forma concisa, el desarrollo de la demostración será sin comentarios, y en caso de que existan, éstos serán puestos al margen, o se aclarará que esos comentarios no forman parte de la demostración. La razón es que cuando al autor sólo le interesa a partir de las premisas obtener el resultado deseado, quedan fuera de la argumentación los orígenes de las expresiones que se ponen en juego, las posibles significaciones o ilustraciones que de ellas se pudieran hacer, dado que su interés es únicamente hacer un análisis lógico del resultado.

El asunto es que en un texto de análisis, lo que está a prueba no sólo es su simplicidad, concisión y elegancia, cualidades que aprecian los especialistas, y que reflejan lo que comparte la comunidad en un momento determinado, pero no hay que olvidar que estas cualidades o el concepto que de ellas se tenga, también son cambiantes. Pero, cuando lo que se pretende es explicarlo, comentarlo, y buscarle otras interpretaciones o nuevas lecturas, entonces todos los recursos son válidos; vale el texto, la explicación, la descripción en otros términos, la búsqueda de nuevas formas de lectura, los comentarios explicativos, las figuras y todo lo que pueda contribuir a una recreación del resultado.

**Referencias**

APOSTOL, Tom M. 1965. *Mathematical analysis. A modern approach to advanced calculus.* Addison Wesley. (2da impresión).

BARRET Louis C. 1962. "*Methods of Proving the Mean Value Theorems". American Mathematical Monthly* **69**: 50-57.

BARRET, Louis C. y JACOBSON, Richard A. 1960. "*Extended Laws of The Mean*": *American Mathematical Monthly* **67:** 1005-1007.

BENNETT, A. A. 1924. "*A Discussion: the consequences of Rolle´s Theorem*." *American Mathematical Monthly* **31:** 40-42.

CAUCHY, Augustin Louis. 1994. *Curso de Análisis.* México: UNAM. (Col. Mathema).

EVANS, Jaqueline P. 1960. *"The Extended Law of the Mean by a Traslatión-Rotatión of Axes"*. *American Mathematical Monthly* **67:** 580-581.

KURATOWSKI, K. 1984. *Introducción al cálculo.* México: Limusa.

SPIEGEL, M. R. 1956. *"Mean Value Theorems and Taylor Series"*. *American Mathematical Monthly* **29:** 263-266.

YATES, R. C. 1959. *"The Law of Mean"*. *American Mathematical Monthly* **66:** 579-580.