Mathesis **III 2**$_2$ (2007) 345-385.

Contribuciones a la Fundamentación de la Teoría de los Números Transfinitos. Una Introducción

Clara H. Sánchez B.

Admitimos en geometría, no solamente magnitudes infinitas, esto es, magnitudes mayores que cualquier magnitud asignable, sino magnitudes infinitamente más grandes, la una de la otra. Esto asombra nuestra dimensión del cerebro, el cual tiene cerca de seis pulgadas de largo, cinco de ancho y seis de profundidad en las cabezas más grandes.
Voltaire

La teoría de conjuntos es un campo autónomo y sofisticado de las matemáticas, enormemente exitoso no solo en el continuo desarrollo de su histórica herencia sino en el análisis de tipos de proposiciones matemáticas en términos teórico-conjuntistas y en la precisión de su consistencia.
Akihiro Kanamor

1. Revoluciones en matemáticas

Se discute si en matemáticas ha habido revoluciones en el sentido de las revoluciones científicas de Kuhn, y aunque este autor usa la noción en muy diversos sentidos, algunos autores consideran que si ha habido revoluciones en matemáticas, dándole a estas características especiales. Por ejemplo, Gillies [1996b] considera que la lógica de Frege en su *Begriffschrift* es una revolución en lógica, una revolución que se caracteriza por no acabar completamente con la teoría anterior, la teoría del silogismo de Aristóteles, y porque hay una fuerte resistencia al cambio en la comunidad científica. El trabajo de Frege es de 1879 y todavía en los años cincuenta del siglo XX se seguía usando la lógica aristotélica en los textos de enseñanza de la lógica; aún hoy se enseña la teoría del silogismo como la herramienta básica de 'control' de razonamientos en algunas áreas del conocimiento como la filosofía o el Derecho. En matemáticas, que es el área que nos incumbe, los textos de lógica son todos de lógica matemática y difícilmente se menciona el nombre de Aristóteles en ellos como referencia. Por otro lado, Dauben [1995], gran conocedor de la obra de Cantor, considera que su teoría de conjuntos transfinitos es una revolución en matemáticas como lo fue en su momento el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables en la escuela pitagórica. El propio Cantor [1976, 49] hace una comparación entre ambas teorías:

> Los números transfinitos son, en cierto sentido, nuevas *irracionalidades* y, ciertamente, creo que el mejor método para definir números irracionales *finitos* es en principio mi método para introducir los números transfinitos. Podemos decir que los números transfinitos permanecen o se derrumban como los números irracionales finitos; en su esencia ellos son parecidos, pues ambos son definitivamente modificaciones delimitadas del infinito en acto.

La resistencia al cambio es un aspecto que vale igualmente para la teoría de conjuntos cantoriana. No hay duda que la teoría de conjuntos transformó completamente el quehacer matemático, como dijera J. de Lorenzo, al, entre otras cosas, cambiar el lenguaje de la matemáticas basado en la noción de conjunto. Y en esta revolución los *Beiträge zur Begründug der transfiniten Mengenlehre* jugaron papel central, mostraremos por qué.

La historia de la teoría de conjuntos tiene dos facetas diferentes que es conveniente explicitar para entender mejor su historia. Una es la historia de la teoría abstracta de conjuntos o teoría matemática del infinito, creada por Georg Cantor en sus trabajos a partir de 1872 y la otra es la historia del enfoque conjuntista de la matemática, la historia de la noción de conjunto como idea fundamental de la disciplina.

La noción de conjunto, como la idea de coleccionar en un todo individuos, parece tan vieja como la humanidad misma; con esto queremos decir que parece ser una idea 'natural' de nuestro pensamiento, y por lo tanto puede rastrearse hasta los orígenes de la matemática en los griegos. Pero una cosa es que esta idea sea natural y otra muy diferente es que se haya convertido en noción básica de la matemática. En este aspecto de la historia juegan papel importante matemáticos como Bernhard Riemann (1826-1866) y Richard Dedekind (1831-1916), además de Cantor. En la historia de la matemática de Bourbaki se hace la distinción, pero allí no me parece tan clara y explícita como en Ferreirós trabajo cuyo objetivo es justamente analizar las dos caras de la historia. Estas son las palabras de Bourbaki [1969, 43]:

> Puede decirse que, en todas las épocas, matemáticos y filósofos han empleado razonamientos de la teoría de conjuntos de modo más o menos consciente. Pero en la historia de sus concepciones sobre este tema es necesario separar claramente todas las cuestiones relacionadas con la idea de número cardinal (y en particular la noción de infinito) de aquellas en las que solamente intervienen las nociones de pertenencia e inclusión. Estas últimas figuran entre las (nociones) más intuitivas y no parecen haber dado nunca lugar a controversias. Hasta finales del siglo XIX no hay dificultad en hablar del conjunto (o clase, según el autor) de los objetos que poseen tal o cual propiedad y la célebre definición de Cantor (se entiende por conjunto la agrupación, en un todo, de objetos bien diferenciados de nuestra intuición o nuestro pensamiento) apenas despertara objeciones en el momento de su publicación.

Estas son las de Ferreirós [1991, 24]:

> [...] me parece necesario establecer un par de distinciones que dejarán claro el enfoque que voy a desarrollar, y sobre todo precisarán cuáles son las preguntas que van a guiar este trabajo. La primera de ellas es la distinción entre la teoría de conjuntos como objeto de investigaciones autónomas —digamos la *teoría abstracta* de conjuntos— y la teoría de conjuntos como herramienta fundamental o lenguaje básico de la matemática —digamos, el *enfoque conjuntista*—.

La unificación de un lenguaje para la matemática con la noción de conjunto en la base, llevó su tiempo; Riemann usó la palabra 'variedad', Dedekind la palabra 'ideal' y Cantor la palabra 'agregado' en sus trabajos, todas esas palabras han venido a unificarse en la palabra 'conjunto'. Por su lado, las palabras 'variedad' e 'ideal' ahora tienen significados específicos en geometría diferencial y en álgebra respectivamente. En este trabajo nos ocuparemos del nacimiento de la teoría de conjuntos de Cantor, o teoría matemática del infinito, sin duda una teoría que marcó un cambio sustantivo en la matemática del siglo XX, una revolución según varios autores.

Antecedentes de los trabajos de Cantor

El siglo XIX comienza sin tener claros dos conceptos esenciales del análisis, los conceptos de función y de número real a pesar de que el cálculo de Newton y Leibniz había hecho necesario extender el concepto de función y de que Euler lo amplía al usar las series infinitas para abordar ciertos problemas de la física como es el caso de la cuerda vibrante. Para 1900 aún se entendía por función ciertas fórmulas algebraicas o trigonométricas, lo habitual era definir una función como una expresión analítica posiblemente infinita, que involucraría variables, constantes, y operaciones conocidas como por ejemplo, +, √ y seno [Kline 1972, 459]. El trabajo de Joseph Fourier (1768-1830) sobre conducción del calor en medios sólidos llevó a considerar una gama más amplia de funciones cuando dio buenas razones para que una función 'arbitraria' pudiera ser representada por medio de una serie trigonométrica; esto es, por medio de una serie de la forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

donde a_n, b_n son constantes definidas por medio de las integrales

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \quad \text{y} \quad a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\,.$$

Este resultado, sin embargo, no fue acogido por los grandes matemáticos de la época como Euler, D'Alembert y Lagrange quienes a pesar de que los trabajos sobre series trigonométricas hacían pensar en que cualquier tipo de función podía representarse por medio de ellas, nunca abandonaron la posición de que una función arbitraria no podía ser representada por una de tales series entre otras razones porque Fourier nunca se preocupó por la convergencia de las series descuidando el rigor que empezaba a ser preocupación seria de los matemáticos del siglo XIX [Kline 1972, 459].

Así, la representación de una función por medio de series trigonométricas se convirtió en tema de investigación de importantes matemáticos de la época. Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) fue el primero en dar un demostración correcta de que la serie de Fourier de una función *f(x)* convergía en un intervalo dado si en dicho intervalo la función estaba definida y acotada, el número de máximos y mínimos era finito y la función era continua salvo en un número finito de puntos; justamente en sus investigaciones sobre el tema, formuló el concepto de función como hoy lo entendemos, una correspondencia entre dos variables sin que haya necesariamente una ley común entre ellas.

Riemann continuó con las investigaciones de Dirichlet debilitando las hipótesis al darse cuenta que no era necesario que la función fuera continua en casi todas partes; para Riemann lo esencial era que la función fuera integrable en todo el dominio y no tuviera un número infinito de máximos y mínimos. Este fue uno de los motivos para dedicarse al estudio de la noción de integral. Los estudios de Riemann le permitieron distinguir claramente entre una serie trigonométrica general y una serie de Fourier. Sus resultados influyeron inmediatamente en la comunidad matemática. Uno de los aspectos importantes en las investigaciones era de demostrar la unicidad en la representación de la función. Cantor entrará a jugar papel definitivo, ya que, matemáticos tan importantes como Dirichlet, Lipschitz (1832-1903) o Riemann fueron incapaces de resolver el problema de la unicidad en la representación [véase: Dauben 1971], y Cantor lo hizo, y al hacerlo comenzó a reflexionar sobre el continuo matemático y su relación con el infinito.

Datos biográficos de Georg Cantor

Georg Cantor nació en San Petersburgo el 3 de marzo de 1845, fue el mayor de cuatro hijos de Georg Woldemar Cantor y María Anna Bóhm; el padre era luterano y la madre católica de quienes recibió una sólida formación religiosa, particularmente de su padre, un próspero comerciante. Por razones de salud del padre la familia se trasladó a Alemania, cuando Cantor contaba apenas once años. Allí, estudio matemáticas en la Universidad de Berlín siendo sus profesores los prestigiosos matemáticos Karl Weierstrass, Leopold Kroneckaer y Ernst Kummer. Bajo la orientación de los dos últimos presentó su tesis de doctorado en 1867 y su *Habilitation schript* en 1869, ambos trabajos en teoría de números.

Comenzó su carrera docente, como *Privatdozent* en la Universidad de Halle, institución respetada, si bien no de tan gran prestigio en matemáticas como las universidades de Gottingen o Berlín. En 1877 se casó con Valery Guttman y con ella tuvo seis hijos. Era un padre cariñoso con sus hijos y les escribía cuando se encontraba lejos de casa. Usaba un gran cuarto de su casa para su estudio en el cual tenía la biblioteca que estaba repleta de libros desde el suelo hasta el techo y el el cual permanecía por largos períodos de tiempo. Su casa era lugar de reunión de matemáticos de halle y cercanías de Leipzig. De la familia de su madre heredó el talento para la música y fue un destacado violinista [Grattan-Guinness 1990, 17].

Además de la matemática se interesó por la filosofía y particularmente por la teología. Todo parece indicar que Cantor fue un maniaco depresivo, su enfermedad fue endógena y no causada por sus fuertes controversias especialmente con Kronecker [Grattan-Guinness 2000, 77]. Este, un finitista y precursor de la escuela intuicionista en matemáticas, pensaba que Cantor era un 'charlatan científico', un 'renegado' y un 'corruptor de la juventud' por sus trabajos que aceptaban el infinito en acto. Uno de sus mejores amigos y corresponsales fue Richard Dedekind (1831-1916), a quien también preocupaba el problema de la estructura del continuo y la fundamentación del análisis. Cantor fue uno de los fundadores de la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* y organizador del Congreso de Matemáticas de 1897. A pesar de todas las dificultades que tuvo para que su teoría fuera aceptada por la comunidad matemática recibió varios homenajes antes de su muerte, ocurrida en

Halle en 1918, de un ataque cardíaco cuando se encontraba en una clínica psiquiatrita [véase: Dauben 1971, 1979 y Grattan-Guinness 2000].

La obra de Cantor

Uno de sus colegas en Halle, Heinrich Eduard Heine (1821-1881), estaba trabajando en la teoría de series trigonométricas y animó a Cantor a atacar el difícil problema de la unicidad de tales series. En 1872, contando Cantor 27 años, publicó un artículo donde presentaba una solución muy general a tal problema, juntamente con el germen de lo que llegaría a convertirse en la teoría de conjuntos transfinitos como veremos en seguida.

En cinco artículos publicados entre 1870 y 1872 Cantor resuelve el problema de la unicidad en la representación de una función por medio de series trigonométricas y es allí donde se encuentra el germen de la teoría abstracta de conjuntos. En marzo de 1870 publica en la revista *Journal de Crelle*[1] su primer artículo sobre el tema, en el cual prueba que: Si a_1, a_2,…b_1, b_2,… son dos series infinitas tales que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx) = 0$$

para todo valor de x en un intervalo (a, b) de números, entonces,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \,.$$

Un mes después aparece publicado en la misma revista otro artículo en el cual demuestra que: Si una función de variable real *f(x)* es dada por medio de una serie trigonométrica convergente para todo valor de *x*, entonces no hay otra serie de la misma forma que converja igualmente para todo valor de *x* y represente a la función *f(x).*

1. Nombre con el que se conoce la revista alemana de matemáticas puras y aplicadas *Journal für die reine und angewandte Mathematik* fundada por August Leopold Crelle in 1826 y que aún se publica.

Este teorema había sido conjeturado por Heine y Riemann había conseguido demostrarlo exigiendo que los coeficientes de la serie fueran coeficientes de Fourier, la función continua y la convergencia de la serie, uniforme.

Cantor demostró el segundo teorema enunciado utilizando el primero; la demostración de la prueba se fundamenta en propiedades de las sucesiones infinitas mas que en las propiedades de las funciones trigonométricas. La habilidad de Cantor para encontrar sucesiones y subsucesiones adecuadas es notable, mostrando desde ya su excelente manejo de los conjuntos infinitos como infinitos acabados o en acto.

Pero descontento con las fuertes restricciones en la hipótesis, se propuso debilitarlas al máximo; en su artículo de 1871 afirma: "[…] se pueden modificar las hipótesis en el sentido de que para ciertos valores de *x* se abandonen la representación de cero por medio de una serie trigonométrica o la convergencia de la serie" [Dauben 1971, 195].
Para lograr su objetivo, Cantor supone la existencia de una serie creciente infinita de valores $\ldots \chi_{-1}, \chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots$, tal que para estos χ_n la representación de cero por medio de la serie o la convergencia de la serie falla.[2] Cantor hace resaltar que estos χ_n ocurren solamente en número finito en intervalos finitos. Con esta restricción comenzó a explorar los conjuntos de puntos excepcionales en intervalos finitos; más tarde mostraría que los conjuntos excepcionales podían llegar a ser infinitos.

El artículo a que nos referimos fue publicado en enero de 1871 y es conocido como el *Notiz* ya que se presentó como una simple noticia sobre el trabajo de abril del 70; esta nota contiene un significativo refinamiento del teorema de unicidad que Dauben [1971, 196] califica de la siguiente manera

> Es una tentación sugerir que este artículo marca una transición en el pensamiento de Cantor. En cierto sentido lo es. Aquí con el "Notiz" de 1871 comenzó un importante trabajo en conjuntos excepcionales. Aunque hizo una extensión, lo hizo sin el recurso de elementos matemáticos de su propia creación.

"Sobre series trigonométricas" es el título del cuarto artículo publicado en abril de 1871 en los *Mathematische Annalen*; además del teorema de unicidad de la representación de una función en serie trigonométrica contiene tres lemas preparatorios. En el primer lema, aunque similar al de marzo del 70, apela Cantor a la geometría para expresar su visuali-

2. Obsérvese que infinito en este momento es infinito numerable (potencial) y todavía no se piensa en otro tipo de infinitos.

zación del problema, lo cual marca un cambio importante en Cantor, ya que habiendo sido formado por Weierstrass quería trabajar aritméticamente como su maestro. El lema 2 no ofrece nada nuevo y en el lema 3 se aprecia nuevamente su habilidad para escoger sucesiones y subsucesiones adecuadas para la obtención de sus resultados.

Para noviembre de este año (1871), Cantor había conseguido extender el teorema de unicidad considerando conjuntos excepcionales infinitos. Sus resultados fueron publicados en los *Mathematische Annalen* en marzo de 1872. Este histórico artículo contiene tres partes: la primera está dedicada a su teoría sobre los números irracionales, la segunda a describir la estructura de los conjuntos excepcionales y la tercera contiene el teorema propiamente dicho.

Cantor se había propuesto desarrollar sobre una sólida base aritmética, una teoría satisfactoria de los números irracionales; quería evitar el circulo vicioso en que puede caerse al definir número real como el límite de una sucesión convergente, sin tener de antemano un conjunto al cual pertenezcan esos limites, como es el caso de Cauchy en su texto *Cours d'Analyse algebraique* (1821), cuando afirmaba [Kline 1972, 951]:

> Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable se acercan indefinidamente a un valor fijo de tal manera que los últimos términos de la sucesión difieren de él (el valor fijo) por una cantidad tan pequeña como se quiera, este último se llama el límite de todos los otros. Así por ejemplo, un irracional es el límite de diversas fracciones las cuales se aproximan cada vez más al límite.

Cauchy omitió este ejemplo en sus trabajos de 1823 (*Resumé des leçons donées à l´Ecole Polytechnique sur le calcul infinitesimal*) y 1829 (*Leçons sur le calcul differentiel*).

En su teoría de los irracionales Cantor parte del sistema de los números racionales al cual denomina sistema A, luego considera las sucesiones de elementos de *A* que satisfacen el criterio de Cauchy[3] y que denomina *series fundamentales.* A cada una de estas series fundamentales asocia un símbolo *b*. Con estos símbolos constituye un nuevo sistema *B* que llegará a ser el conjunto de los números reales cuando da a *B* una estructura de cuerpo ordenado y lo pone en correspondencia 1-1 con los puntos de una línea recta.

Dos sucesiones fundamentales $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ definen el mismo número real si y solo si la sucesión $\{a_n - b_n\} \to 0$ cuando n crece. Si suponemos

3. Una sucesión $\{a_n\}$ satisface el criterio de Cauchy si dado un $\varepsilon > 0$, existe N ε $\mathcal{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para todo $n, m > N$.

que a es el número asociado con $\{a_n\}$ y b con $\{b_n\}$, la relación de orden entre elementos de B se define como sigue: Para cualquier racional $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, y para todo número natural n mayor que un N suficientemente grande se tiene

$$a = b \text{ si } (a_n - b_n) < \varepsilon$$
$$a < b \text{ si } (a_n - b_n) < -\varepsilon$$
$$a > b \text{ si } (a_n - b_n) < \varepsilon$$

Además se puede mostrar que $\{a_n \pm a_n'\}$, $\{a_n \,.\, a_n'\}$ y $\{a_n / a_n'\}$ son sucesiones fundamentales que definen los números $b \pm b'$, $b \,.\, b'$ y b / b' $(b' \neq 0)$ respectivamente.

Como hemos dicho los símbolos del sistema B solo adquieren sentido cuando son puestos en correspondencia 1-1 con los puntos de una línea recta. Cantor sabía que si un punto guardaba una relación racional con la unidad entonces era expresable por medio de un elemento de A; en caso contrario podía aproximarlo por medio de una sucesión de puntos racionales $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ cada uno de los cuales correspondía a un elemento de A y considerar $\{a_n\}$ como una sucesión fundamental que se aproximaba al punto dado tanto como se quisiera. Dado que cada elemento de A tiene un único correspondiente en B, la unicidad de la representación de los puntos de la recta en B estaba garantizada. Lo que naturalmente Cantor no pudo garantizar fue la correspondencia inversa; que a cada elemento de B correspondiera un punto de la recta; tuvo que invocar entonces al axioma que garantiza que 'a toda magnitud numérica [del sistema B] corresponde un punto en una línea recta cuya coordenada es igual a esa magnitud numérica'.

Cantor mostró que el espacio de las sucesiones fundamentales es cerrado para las operaciones aritméticas y que, como toda sucesión constante $\{a\}$ es una sucesión fundamental, todo elemento de A debe ser un elemento de B. De esta manera sumerge el conjunto de los racionales dentro de su sistema B que será el de los reales.

Ahora bien, si se consideran sucesiones fundamentales $\{b_n\}$ de B y a cada una se le asocia con un símbolo c se constituye un nuevo sistema C. Continuando el proceso Cantor obtiene dominios de orden cada vez mayor y después de λ construcciones alcanza el dominio L, el cual es cerrado para las operaciones aritméticas y en él se puede definir un orden como en el caso de B. Pero hay una diferencia crucial entre A, B y los sistemas de órdenes siguientes, mientras que a cada elemento a de A se puede hacer corresponder uno de B, no todo elemento de B tiene un correspondiente en A. Sin embargo, cada elemento b de B tiene un correspondiente c en C y recíprocamente, cada c de C tiene un correspondiente en B y recíprocamente, y así sucesivamente con todos los sistemas hasta L, lo cual significa que todos los sistemas a partir de B son iguales salvo isomorfismo. De esta manera consigue que su sistema sea completo.

Luego de su discusión sobre los números reales, Cantor procede a trasladar sus resultados al lenguaje de los conjuntos de puntos, haciendo la salvedad de que siempre que use la palabra 'punto' se debe tener en mente su correspondiente magnitud numérica. Llamará *Wertmenge* [conjunto de valores] a una colección finita o infinita de valores y *Punkmenge* [conjunto de puntos] a una colección cualquiera de puntos. Define 'punto límite de un conjunto puntual' P como un punto p de la recta en una situación tal que en una vecindad del mismo se encuentran infinitos puntos de P, pudiendo suceder que el mismo p pertenezca al conjunto P. Por 'vecindad de un punto' se debe entender todo intervalo que tenga al punto en su interior; de aquí es fácil concluir que un conjunto puntual acotado que conste de una cantidad infinita de elementos debe tener siempre por lo menos un punto límite.

Con este último resultado Cantor puede ahora afirmar que dado un conjunto P de puntos de la recta y un punto p cualquiera de ella, p es punto límite de P o no lo es. Esto le permite formar el conjunto de los puntos límites de P que llamará 'conjunto derivado' y notará P'. Como P' es un conjunto de puntos, se puede formar su conjunto derivado $(P')'$ y el derivado de este $((P')')'$ y así sucesivamente haciendo una analogía con las construcciones de los sistemas *B, C, D, ...* a partir de *A*.

La noción de conjunto derivado permite a Cantor clasificar los conjuntos en dos tipos: los de la 'primera especie' son aquellos para los cuales existe un natural n tal que el *n-ésimo* conjunto derivado de P sea vacío, esto es $P^{(n)} = \varnothing$; los de la 'segunda especie' son aquellos para los cuales no existe un tal n y el proceso de derivación se puede continuar indefinidamente

$$(1) \qquad P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, ..., P^{(n)}, ... \quad .$$

Como cada término de la serie de derivados de P está contenido en el precedente ya que $P^{(n)}$ se obtiene de $P^{(n-1)}$ quitando probablemente algunos puntos, entonces, si P es de la segunda especie, P' constara de dos conjuntos *Q y R:* El conjunto Q estará formado por aquellos puntos que eventualmente desaparecen al avanzar lo suficiente en la sucesión (1) y R por los puntos que permanecen en todos los conjuntos de la sucesión, o sea, la intersección de todos los derivados de P. Cantor denota al conjunto R por $P^{(\infty)}$ y lo llama 'el conjunto derivado de P de orden ∞'.

El conjunto derivado de $P^{(\infty)}$, $P^{(\infty)'}$ se denota $P^{(\infty+1)}$ y continuando el proceso puede formar, sucesivamente $P^{(\infty+2)}$, ..., $P^{(\infty+n)}$. Nuevamente $P^{(\infty)}$ puede tener un derivado de orden infinito que será denotado $P^{(2\infty)}$ y, con esta construcción, se llega a la sucesión

$$P^{\infty}, P^{\infty+1,}, \ldots, P^{\infty+m}, \ldots, P^{2\infty}, \ldots, P^{\infty^2}, \ldots, P^{\infty^{\infty}}, \ldots, P^{\infty^{\infty^{\infty^{\infty}}}}$$

La concepción de estos conjuntos de la segunda especie fue el paso crucial en la creación de los números transfinitos, que consideramos más adelante; los de la primera especie son esenciales en la demostración del teorema de unicidad en presencia de conjuntos excepcionales infinitos, del cual trata la tercera y última parte del artículo de 1872.

> Debe resaltarse que el concepto de punto límite y la idea asociada de primer conjunto derivado *P´* de puntos límites de *P* son los elementos básicos, fundamentales en el desarrollo de la teoría de conjuntos de Cantor. No solamente juegan ellos un papel importante en la demostración del teorema de unicidad publicado en 1872, sino que contienen también las semillas de importantes consecuencias [...]. El concepto de primer conjunto derivado de *P*, fue también el medio por el cual Cantor más tarde categorizó conjuntos como siendo, por ejemplo, perfectos, cerrados o densos [Dauben 1971, 209].

Estos trabajos llevaron a Cantor a reflexionar muy seriamente sobre conjuntos infinitos y decidió emprender su estudio. El infinito ha llamado la atención de filósofos y matemáticos desde la época de los griegos por sus aparentes propiedades contradictorias; basta recordar las paradojas de Zenón y la distinción aristotélica entre infinito actual e infinito potencial.

Aristóteles no podía negar totalmente la existencia del infinito pues tenía la evidencia del infinito en matemáticas y en geometría. Los números naturales son tales que dado uno de ellos por más grande que sea siempre se puede pensar en uno mayor y por otro lado en geometría en la noción de línea recta (lo que hoy llamamos segmento de recta) como una magnitud continua está implícita la divisibilididad indefinida. Como bien decía Aristóteles [*Física*, Libro III, Capítulo VII]:

> […] nuestra manera de pensar no quita nada a las matemáticas de su ciencia, desaprobando la existencia real del infinito... De hecho ellos no necesitan del infinito y no lo usan. Ellos solamente postulan que una línea recta finita puede prolongarse tanto como se quiera.

Con Moore [1982, 22] podemos afirmar que el infinito actual, que Aristóteles desterró en favor del infinito potencial, reentró en favor de las matemáticas a través de la teoría de los conjuntos de Cantor. Lo que Galileo, en sus *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias* de 1638, había visto y considerado como anomalía al poner en correspondencia biunívoca las sucesiones de números enteros positivos con sus respectivos cuadrados

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots & n & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & & n^2 & \ldots
\end{array}$$

se convirtió en la definición de infinito para Cantor. Así un conjunto es infinito si puede ponerse en correspondencia 1-1 con una parte propia de si mismo. Bernard Bolzano (1781-1848) en su libro *Paradojas del infinito* (1851) había usado la noción de correspondencia biunívoca como principio de clasificación de conjuntos según su tamaño, pero Bolzano nunca intentó desarrollar sistemáticamente la teoría de conjuntos infinitos. Fue Cantor quien usó este método para probar en 1874 que los números racionales se pueden poner en correspondencia 1-1 con los números enteros positivos. Su segunda prueba dada en 1875 es la más conocida; los números racionales se colocan como sigue y se cuentan siguiendo las flechas, evitando las repeticiones obvias, como 2/2 = 3/3 = 4/4 etc.

$$\begin{array}{cccccc}
1 \rightarrow & 2 & 3 \rightarrow & 4 & 5 \rightarrow & \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \ldots \\
\downarrow & & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \ldots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \ldots \\
\downarrow & & & & & \\
\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \ldots
\end{array}$$

También en 1874 Cantor demuestra por primera vez en un artículo titulado: “Sobre una propiedad de la totalidad de los números algebraicos” que los reales no son enumerables, la prueba es como sigue [Dauben 1984]: Supongamos que los números reales fueran numerables, esto significaría que los podríamos poner en correspondencia biunívoca con los números naturales y formar una lista con ellos, digamos

$$r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ... (r).$$

Entonces, afirmaba Cantor, debe existir por lo menos un elemento ηde R en un intervalo cerrado dado [*a, b*] en R que no pertenezca a la sucesión. Suponiendo que $a < b$, toma los dos primeros términos de (*r*) que caen dentro del intervalo [*a*, *b*]; llama a estos números a', b' y forma con ellos otro intervalo [a', b']. Procede de igual manera para formar una sucesión de intervalos cerrados encajados [a^n, b^n], donde a^n y b^n son los dos primeros números de (*r*) que caen dentro [a^{n-1}, b^{n-1}]. Si el número de estos intervalos fuera finito entonces en el último [a^n, b^n] solo podría estar incluido un elemento más de (*r*) como máximo; pero en este caso es caso fácil obtener como conclusión que se podría tomar un número η perteneciente a este último intervalo y que no figurase en (*r*); basta tomar cualquier número real en [a^n, b^n], con tal que no coincida con el número de la sucesión que hemos mencionado.

Ahora bien, si el número de intervalos [a^n, b^n] no es finito Cantor considera las sucesiones monótonas a^1, a^2, ..., a^n ,... acotada superiormente por *b*, y por tanto con un límite superior que denotaremos a^∞, y b^1, b^2,..., b^n, ... acotada inferiormente por *a* , y por tanto con un límite superior b^∞. Obviamente se tiene que $a^\infty \leq b^\infty$. Analiza entonces Cantor las dos posibilidades: 1) Si $a^\infty < b^\infty$ entonces como en el caso finito es fácil encontrar un real $\eta \in (a^\infty, b^\infty)$ que no esté en la sucesión; y, 2) si $a^\infty = b^\infty$ razonando nuevamente por reducción al absurdo llega al resultado esperado.

En efecto, si $\eta = a^\infty = b^\infty$ fuera alguno de los r_p, por un lado estaría fuera de los intervalos encajados [a^n, b^n] para un *n* suficientemente grande, pero por otro lado, dada la definición de η, estaría en todos los intervalos independientemente de *n*, llegándose así a una contradicción. Por lo tanto R no es enumerable.

Cantor probó en este artículo que los números algebraicos son enumerables y obtiene como resultado de manera indirecta que hay infinitos números trascendentes. Esta demostración se considera el punto de partida de la teoría abstracta de conjuntos y causó un serio distanciamiento entre Cantor y Dedekind, pues el segundo consideraba que la prueba de Cantor era en realidad suya [Ferreirós 1991, 210].

Cantor al descubrir, por lo tanto, que hay dos tipos de infinito: el de los naturales y el de los reales, se estimuló por investigar si habría conjuntos infinitos de cardinalidad mayor a la de los números reales o si existen subconjuntos infinitos de *R* con cardinales distintas de las de N o *R* mismo. La afirmación es una de las formas de la *Hipótesis del Continuo*, motor indiscutible en la obra de Cantor a la que dedicamos una sección especial en esta introducción. Inicialmente pensó que conjuntos continuos de dimensiones mayores o iguales a 2 servirían de ejemplo.

Su sorpresa fue mayor al darse cuenta que no era el caso cuando probó que un cuadrado y su lado tienen el mismo número de puntos; en esta ocasión en carta a Dedekind afirmó "lo veo y no lo creo" [Grattan-Guinness 2000, 89]. La prueba fue publicada en 1878. En este artículo Cantor estableció que dos conjuntos tienen el mismo tamaño, el mismo cardinal, si pueden ponerse en correspondencia biunívoca y que en el caso que si *M* y *N* son dos conjuntos infinitos tales que *M* es equipotente a un parte *N´* de *N* pero no es equipotente con la totalidad de *N* entonces se puede afirmar que el cardinal de *M* es menor que el cardinal de *N*. En este artículo está implícita la propiedad de la tricotomía entre cardinales, esto es, que car(M) < card(N) o card(N) < card(M) o card(M) = card(N), resultado que hoy sabemos depende del *Axioma de Elección*. Cantor afirma que el concepto de número cardinal generaliza la noción de número para conjuntos finitos, esto es el concepto de número natural en su función de responder a la pregunta ¿cuántos elementos tiene un conjunto?

Entre 1879 y 1884 Cantor publicó una serie de seis artículos en los *Mathematische Annalen* en los cuales desarrolla su teoría de los números cardinales y ordinales transfinitos. Allí se encuentran las nociones básicas de su teoría de conjuntos. Felix Klein era el editor de la revista y facilitó su publicación. El quinto de estos artículos se titula: "Fundamentos de una teoría general de conjuntos" conocido como los *Grundlagen* por su título en alemán. En él hace una defensa de sus ideas en términos matemáticos, teológicos y filosóficos para responder a los críticos de sus investigaciones. En este artículo [Cantor 1976, 70] hace una distinción entre dos significados de la palabra 'infinito':

> […] el infinito matemático ha ocurrido principalmente con el significado de una magnitud que crece sobre todos los límites o decrece a una pequeñez arbitraria, siempre, sin embargo permaneciendo finita. Llamo a este infinito el *infinito no genuino* (o infinito impropio). Al lado de esto, en los períodos modernos y contemporáneos, tanto en geometría como, en particular en la teoría de funciones, un concepto de infinito diferente pero igualmente justificado ha aparecido. […] ha sido necesario y de hecho es una práctica común imaginar un punto en el infinito. Cuando este infinito ocurre lo llamo *infinito genuino* (o infinito propio).

Cantor desarrollará la teoría de los infinitos propios; el cálculo manejaba desde tiempo atrás las variables que pueden hacerse tan pequeñas o tan grandes como se quiera, es decir, usaba el infinito impropio, que se simbolizaba y se sigue simbolizando por ∞; para el infinito propio introducirá luego su propia notación. Dice Babini [1974, 54]:

La teoría cantoriana legitima el infinito actual, este infinito como ser, que está 'en la naturaleza de las cosas' y que hasta entonces había estado reprimido, a manera de complejo freudiano, para no permitir emerger a la luz de la conciencia matemática más que el infinito potencial, el infinito como devenir. Y así como el siglo XIX había legislado sobre el infinito potencial, Cantor con su teoría de conjuntos legislará, jerarquizará y clasificará este infinito actual.

Para demostrar el teorema de unicidad en la representación de una función por medio de series trigonométricas, Cantor necesitó, como ya vimos, del concepto de 'conjunto derivado'.[4] El teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza que cuando un conjunto es infinito y acotado, su conjunto derivado no es vacío.

Recordemos que Cantor clasifica los conjuntos en dos tipos, los de la 'primera especie' y '*n*-ésima clase', aquellos para los cuales existe un entero n tal que $P^{(n)}$ es vacío y aquellos para los cuales no existe tal n, los llama de la 'segunda especie'. En este último caso el proceso de derivación puede continuarse indefinidamente, como vimos en el apartado anterior, formándose la sucesión

$$P^{\infty}, P^{\infty+1}, \ldots, P^{\infty+n}, \ldots, P^{\infty^2}, \ldots, P^{\infty^{\infty}}, \ldots$$

Los superíndices son introducidos apenas como 'símbolos del infinito'. Cantor en un comienzo pensaba que estos símbolos tenían solo un carácter formal, pero para fines de 1883 en carta a Dedekind, le manifiesta su creencia en que son números legítimos. En esta carta cambia el símbolo tradicional ∞ por el símbolo ω (última letra del alfabeto griego) para representar el límite de la sucesión

$$1,\ 2,\ 3, \ldots , n, \ldots \qquad \text{(I)}$$

Cantor observa que (I) se obtiene añadiendo una unidad al elemento inmediatamente anterior y llama a esta ley, 'Primer principio de generación'. Aunque no se puede hablar de un número máximo en (I) si se puede imaginar un número ω que sea mayor que todos y que exprese que (I) está dada en su orden natural. Permitiendo añadir una unidad a ω y aplicando el primer principio, se forma una nueva sucesión $\omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots, \omega+n, \ldots$ la cual tampoco tiene un máximo: pero como en el caso de (I) se puede pensar en un número mayor que todos y lo denota 2ω.[5] Esta operación lógica que permite obtener ω y luego 2ω Cantor la llamó 'Segundo Principio de Generación'. Aplicando reiteradamente los dos principios construye la sucesión

$$\omega, \omega+1, \ldots, \omega+n, \ldots, 2\omega, 2\omega+1, \ldots, 3\omega, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot}}}} \qquad \text{(II)}$$

4. El conjunto derivado de un conjunto P es el conjunto de los puntos límites de P.
5. Posteriormente Cantor invirtió el orden de los términos en la multiplicación de ordinales, con lo cual 2ω pasó a ser $\omega 2$ y esta es la notación moderna.

Si se toma la totalidad de los números en (II) que Cantor llama 'números de la segunda clase', la primera es (I), y se piensa en uno mayor que todos ellos, se aplica un nuevo principio, que Cantor denominó 'Principio de limitación'; él mismo señala que (I) y (II) no tienen la misma potencia y que por lo tanto el número obtenido a partir de este último principio, debe ser necesariamente de una potencia mayor, justamente la siguiente potencia de la de (I). Este principio de limitación le permite definir potencias cada vez más grandes.

En conjuntos finitos, cualquiera sea la forma que contemos o enumeremos sus elementos siempre llegaremos a un mismo número; en conjunto infinitos el número depende del orden que escojamos. Cantor fue quien se dio cuenta de que la 'enumeración' de un conjunto infinito depende del buen orden que se le dé; sin embargo, el número de elementos del conjunto no puede cambiar si se cambia su orden. Cantor definió el concepto de buena ordenación en la segunda sección de los *Grundlagen* y la precisará en la segunda parte de los *Beiträge*. El tipo ordinal de los conjuntos bien ordenados lo llamará 'números ordinales' y pretenden generalizar la idea de serie, implícita en los naturales, los cardinales pretenden responder a la pregunta de cuántos elementos tiene un conjunto. Cantor se expresa al respecto como sigue:

> La concepción de número la cual, *infinito*, tiene solo el fundamento de numerar, explota, en cierta manera de hablar, cuando nos dirigimos al infinito, en las dos concepciones de *potencia*... y *enumeración* ...; y, cuando nuevamente desciendo a lo finito, veo justamente cuan clara y bellamente estas dos concepciones *se unen* nuevamente para formar los enteros finitos [Cantor 1915, 52].

En 1884 recibió una nota de Mittag Leffler el editor de los *Mathematishe Annalen* en la que le negaba la publicación de uno de sus artículos. Este fue un duro golpe para Cantor, ya que además de su gran oponente como lo era Kroneker, finitista por excelencia, y quien pensaba que la teoría de conjuntos no tenía importancia alguna, Mittag leffler a quien consideraba su amigo, le rechazaba uno de sus trabajos. Por esta época sufre uno de sus primeros graves problemas mentales que le exigen hospitalización y decide no publicar más en revistas de matemáticas y más bien en revistas de filosofía. Sin embargo sigue trabajando en matemáticas y dando sus cursos en la universidad.

En 1891, Cantor encuentra una nueva prueba sobre la no enumerabilidad de los reales, es esta la más famosa de las dos ya que en ella usa el método de la diagonalización, método que resultó muy fecundo en matemáticas, (Gödel lo usará más tarde en sus pruebas de incompletitud, por ejemplo). El mismo lo usará para demostrar que cualquier conjunto A tiene una cardinalidad estrictamente menor que la del conjunto de sus partes $P(A)$. Este importante resultado permite encontrar cardinalidades cada vez más grandes. Cantor termina este trabajo sosteniendo que los números cardinales representan la única y necesaria generalización de los números cardinales finitos, salvo que algunas de las propiedades que cumplen estos no valen para los cardinales transfinitos. El estudio de las aritmética transfinita será elaborada sistemáticamente en los *Bieträge*, trabajo que nos ocupa.

La prueba la hace por reducción al absurdo en los siguientes términos: Suponiendo que el intervalo (0, 1) sea enumerable y usando la expansión decimal de los reales tendríamos que la siguiente lista los agotaría completamente

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0{,}a_{11}a_{12}a_{13}\ldots & \\ x_1 = 0{,}a_{21}a_{22}a_{23}\ldots & \\ x_2 = 0{,}a_{31}a_{32}a_{33}\ldots & \quad a_{ij}\ \varepsilon\ \{0,1,2,\ldots,9\} \\ \vdots & \end{array}$$

Ahora bien, si consideramos un número de la forma $b = 0{,}b_1\ b_2\ b_3\ldots.$ donde $b_i\ \varepsilon\ \{0,1,2,\ldots,9\}$ y $b_i \neq a_{ii}$ para cualquier i, tenemos que $b\ \varepsilon\ (0, 1)$ pero b no está en la lista, llegándose así a una contradicción. Si lo añadimos a la lista el proceso se repite, con lo cual es imposible poner en correspondencia biunívoca a N con R.

Las dos pruebas son distintas en carácter, la primera es constructiva y la segunda por reducción al absurdo. Kanamori [1996, 4] resalta este hecho anotando que Cantor siempre fue muy cauteloso en sobrepasar el espíritu matemático de su tiempo. En los libros de texto, dice, la inversión puede ser inevitable, y una presentación histórica inadecuada ha perpetuado que la diagonalización se asocie con no constructibilidad. La primera prueba por intervalos encajados permite obtener expansiones decimales tan precisas como se desee de un determinado número real.

Al Cantor decidir no volver a publicar en revistas de matemáticas resuelve dedicarse a otros intereses como estudiar la historia de Inglaterra y su literatura para participar en la polémica Bacon-Shakespeare de moda en la época en la que algunos afirmaban que Francis Bacon era el verdadero autor de las obras de Shakespeare. Fue una época en la que quiso enseñar filosofía en la Universidad de Halle, pero no lo logró, y tuvo una interesante correspondencia con teólogos que se interesaron por sus teorías acerca del infinito [véase: Dauben 1990]. Cantor pensaba que era un enviado de Dios para transmitir esta teoría como se puede leer entre líneas en los epígrafes del primero de los *Beiträge*.

En 1891 ante la asociación de matemáticos alemanes de la que fue gestor presentó una nueva demostración del teorema de la no enumerabilidad de los reales, con el método de la diagonalización mucho más general que el primero y que usó en el mismo trabajo para probar que un conjunto siempre tendrá un cardinal menor que sus partes de gran trascendencia pues garantiza la existencia de infinitos cardinales transfinitos. Sus últimas publicaciones son los *Beiträge* escritos especialmente para matemáticos dejando de lado las consideraciones filosóficas. Los "Beiträge zur Begrundug der transfiniten Mengenlehre" ["Contribuciones a la fundamentación de la teoría de números transfinitos"] fueron publicados en dos partes en 1895 y 1897 en la revista *Mathematische Annalen.* En ellos resume sus resultados más significativos y mejora la presentación de su teoría al hacer una exposición clara y sucinta sin detenerse en mayores explicaciones. Estos artículos fueron traducidos casi de inmediato al italiano y al francés lo que permitió la divulgación y consolidación de la teoría de conjuntos de Cantor. Fueron igualmente traducidos al inglés por Philip E. B. Jourdain (1879-1919) y publicados en 1915 con un excelente prólogo, texto que para los que no leemos en alemán y estamos interesados en la historia de la teoría de conjuntos fue una fuente principal. En español nos llegan ciento diez años tarde,[6] más vale tarde que nunca y serán accesibles a un amplísimo grupo de estudiantes, profesores e investigadores atraídos por el tema.

La teoría de conjuntos después de los *Beiträge*

La Hipótesis del Continuo

Uno de los puntos a resaltar es que siendo la *Hipótesis del Continuo* un punto central en las investigaciones de Cantor no encontramos en su 'resumen' para los matemáticos mención a esta. Era realmente un punto muy sensible en su investigación que como veremos solo pudo ser resuelto unos cuantos años después de su muerte. La teoría de conjuntos, permitió resolver problemas que habían sido atacados por los matemáticos durante mucho tiempo. Tal vez el problema más interesante desde los puntos de vista filosófico y matemático es el del continuo lineal, esto es, el de caracterizar completamente el conjunto de los números reales. Los griegos tuvieron serias dificultades al tratar de unir las nociones de número y magnitud. Para ellos, números eran solamente

6. Además de esta traducción hecha directamente de los originales en alemán, existe otra versión en español en el libro de Stephen Hawking [2006, 841-908]. Con una breve introducción sobre la vida y obra de Cantor [págs. 835-839] es traducción de la versión en inglés de Jourdain [Cantor 1915]..

los números naturales y los concebían como entidades discontinuas; en cambio las magnitudes eran continuas. Por magnitud entendían las longitudes, las áreas, los volúmenes y podían ser inconmensurables con respecto a una unidad dada, como en el caso de la longitud de la diagonal de un cuadrado con respecto a la longitud del lado. De ahí el conflicto presentado por los irracionales, números como $\sqrt{2}$ no podían existir.

La teoría de las proporciones de Eudoxio, que permite comparar magnitudes de la misma especie y evitar el uso de los irracionales, era para los griegos independiente de la teoría de números como es fácilmente observable en los *Elementos* de Euclides, ya que la primera se encuentra en el libro V mientras que la segunda se encuentra en los libros VII, VIII y IX. El conflicto presentado por la no conciliación entre números y magnitudes fue lo que llevó a privilegiar la geometría sobre el álgebra durante tantos siglos. Apenas en el siglo XIX con la corriente de rigorización del análisis se resolvió el viejo problema de los irracionales. Weierstrass, Dedekind y Cantor dieron sus soluciones, quizás la más conocida es la de Dedekind: un número real es una cortadura de números racionales [Dedekind 1998].

La continuidad de la recta fue cuestionada por Zenón de Elea en sus famosas paradojas sobre el movimiento, éstas envuelven los conceptos de continuidad, de infinito y de infinitesimal. Los infinitesimales fueron desterrados de la matemática con la aritmetización del análisis, basada en la definición de número real, que permitió a su vez rigorizar el concepto de límite fundamental en análisis. Cantor entró en este movimiento y fue quien además de dar una definición rigurosa de número real logró dar un tratamiento matemático riguroso al concepto de infinito.

La teoría de conjuntos permitió, entonces, dar una explicación a las paradojas de Zenón [véase: Russell 1903, capítulo XLII] y conciliar sobre una buena base, las teorías de números y la teoría de las magnitudes. Cantor caracterizó el continuo de la recta real por medio de un tipo de orden que llamó θ al que dedica la sección once de los "Beiträge". Si un conjunto ordenado es perfecto[7] y contiene un subconjunto denso enumerable tiene el tipo de orden θ .

De esta manera Cantor caracterizó el tipo ordinal de *R* pero nunca pudo responder a la pregunta de cuál es la potencia, o cardinal del continuo. Me explico, demostró que era $2^{\aleph_0}$ pero nunca supo a qué álef correspondía. Conjeturó que sería $\aleph_1$, la potencia del conjunto de los números de la segunda clase. En carta a Dedekind en 1882 dio el nom-

7. Un conjunto es perfecto si todos sus puntos, son puntos límites.

bre de 'teorema de la segunda clase' (los números de la segunda clase son tratados en la sección 15) a esa conjetura que formuló como sigue: Todo subconjunto infinito de *R* es enumerable o tiene la potencia del continuo. Esta fue la formulación original de la *Hipótesis del Continuo*. Más tarde dio una versión más fuerte: *R* tiene la potencia de la segunda clase. Afirmación que en notación álef se establece como

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

ya que él había demostrado (sección 4) , como anotamos, que R tiene como cardinal $2^{\aleph 0}$.

Cantor probó en 1891 su famoso teorema de que el cardinal de un conjunto *A* siempre es estrictamente menor que el cardinal del conjunto de partes P(A),

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{P(A)}}$$

con ello garantizó la existencia de cardinales cada vez mayores y aunque él nunca estableció la hipótesis generalizada del continuo de que

$$2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$$

para todo número natural *n*, si lo sugiere en sus escritos.[8] Explícitamente afirma en un artículo de 1883 que el conjunto de todas las funciones de reales tienen la potencia de la tercera clase, o sea

$$2^{\aleph_1} = \aleph_2 .$$

Muchas veces creyó Cantor haber demostrado la *Hipótesis del Continuo* y ante su fracaso y el rechazo de algunos matemáticos por su teoría no volvió a investigar sobre ella. La *Hipótesis del Continuo* (HC) junto con el *Axioma de Elección* han sido los axiomas más discutidos de la teoría de conjuntos. Gödel en su artículo titulado ¿*Qué es el problema del continuo de Cantor*? afirma

> […] ni siquiera podemos asignar una cota superior, por grande que sea a la cardinalidad del continuo. Tampoco la cualidad de número cardinal del continuo nos resulta mejor conocida que su cantidad [Gödel 1981, 343].

8. Felix Haussdorff, primero en desarrollar la teoría de los transfinitos después de Cantor, fue quien primero sugirió la riqueza de posibilidades en la investigación matemática sobre los transfinitos más grandes. El se aventuró con entusiasmo más allá de los números de la segunda clase [Kanamori 1996,17].

Gödel demostró en 1938 que la *Hipótesis del Continuo* es consistente con el sistema axiomático de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF) y solo en 1963, Cohen consiguió demostrar su independencia. Resulta entonces que para una gran cantidad de álefs la igualdad

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

es consistente con ZF y por tanto no implica ningún nuevo teorema de la teoría de números.

El problema de la *Hipótesis del Continuo*, que consistía en demostrar que es un teorema de la teoría de conjuntos, fue el primero de los diez problemas propuestos por David Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticas en París en 1900; como hemos señalado solo vino a resolverse negativamente en 1963 con el trabajo de Paul Cohen, quien inventó una nueva técnica llamada 'forcing' para conseguir este importante resultado.

> Es una histórica ironía que muchos de los matemáticos
> que se opusieron al axioma de Elección
> lo habían usado implícitamente en sus trabajos.
> Moore [1982, 64]

El Axioma de Elección

Conocido como el *Principio de Buena Ordenación* (PBO), Cantor [1976, 72] conjeturó en 1883 en sus *Grundlagen* que todo conjunto (bien definido) puede ser bien ordenado; pensaba que esta era una ley del pensamiento, fundamentalmente rica en consecuencias y particularmente notable por su validez general. Había escrito a Dedekind sobre si existían potencias infinitas, además de los álefs, pensando que no hay otras y de ahí su *Hipótesis del Continuo*. Sus contemporáneos no estaban de acuerdo y Cantor transformó su ley en una pregunta. Intentó una respuesta y en 1897 pensó haberla encontrado. En 1900 en el Congreso de París, como ya mencionamos, Hilbert al colocar como primer problema a resolver en el siglo XX el de la *Hipótesis del Continuo*, resaltó la necesidad de tener un buen orden para los reales. A partir de este momento la demostración del PBO adquiere mayor interés.

En 1904, Ernst Zermelo (1871-1953) publica en los *Mathematische Annalen* una prueba del PBO; el artículo hacía parte de una carta que Zermelo había escrito a Hilbert el 24 de septiembre de ese año. La prueba de Zermelo hacía uso de una nueva herramienta en matemáticas el *Axioma de Elección* (AE). Según el propio Zermelo el AE había surgido de conversaciones con Erhard Smith. En este histórico artículo el AE fue enunciado de la siguiente manera:

> A cada subconjunto M' [de un cierto conjunto M] se puede asociar un elemento cualquiera m'_1 de M' mismo y que puede ser llamado el "elemento distinguido" de M' [Moore 1982, 90].

El principio supone que aún para totalidades infinitas de conjuntos hay siempre funciones que asocian a cada subconjunto uno de sus elementos, o, expresado formalmente, que el producto de una totalidad infinita de conjuntos cada uno de ellos con al menos un elemento no es vacío.

La prueba de Zermelo fue fuertemente atacada por matemáticos de la época. Esto hizo que Zermelo se defendiera en un artículo de 1908 titulado: "Una nueva prueba de la posibilidad de un buen orden"; artículo que contiene dos partes: en la primera ofrece una nueva prueba del PBO, en la cual también hace uso del AE; y en la segunda discute las objeciones hechas a la primera prueba. Según Zermelo éstas tenían tres fuentes principales: 1) los malos entendidos sobre la teoría de conjuntos de Cantor; 2) reservas sobre el AE; y 3) sospechas sobre cualquier argumento que recordara las paradojas de la teoría de conjuntos.

En este artículo Zermelo propone una nueva versión del axioma en la que reconocemos la forma actual más conocida del axioma:

> Si un conjunto S se parte en una familia disjunta A de conjuntos no vacíos. Entonces existe al menos un subconjunto T de S que contiene exactamente un elemento en común con cada miembro de A [Moore 1982, 144].

Los ataques al axioma llegaron de todas partes, incluso de matemáticos que lo habían usado implícitamente en sus investigaciones como Baire, Borel y Lebesgue en Francia, W. H. Young en Alemania, Russell y Whitehead en Inglaterra. Los italianos Peano, Bettozi y Levi atacaron el axioma fuertemente por salirse de los patrones lógicos usados hasta el momento. Esto sin contar los ataques de los intuicionistas como Brouwer que rechazaron siempre el uso del infinito actual en matemáticas [Moore 1982, capítulo II].

Una de las características del AE es que aparece implícito en muchas ramas de la matemática. Parte de la historia de este axioma radica justamente en esto, en los intentos por demostrarlo se descubrieron muchas de sus formas equivalentes que 'escondían' el AE. La situación de rechazo del axioma cambia en 1918 cuando aparece un abogado del axioma, el matemático polaco Waclao Sierpinski (1882-1969). Aunque él había escrito sobre el axioma en 1916, es en el artículo de 1918 que hace un detallado estudio sobre los usos del AE, clarificó su papel y motivó a sus discípulos a estudiarlo con mayor profundidad. La recién creada escuela polaca, que se dedicó al estudio de la teoría de conjuntos, aceptó el axioma y exploró las relaciones con otras ramas de la matemática.

En un cursillo dictado en el *Instituto de Estudios Avanzados* de Princeton en 1938, Gödel demuestra que el axioma es consistente con la teoría axiomática de conjuntos, si ésta es consistente, y con ello despejó las dudas sobre la posibilidad de que el axioma introdujera contradicciones en la matemática.[9] El trabajo de Cohen, ya mencionado, demostró en 1963 que tanto el AE como la HGC son independientes de la teoría de conjuntos de Zermelo Fraenkel.

La importancia del axioma la podemos justificar plenamente diciendo que el axioma ha resultado equivalente a más de cien proposiciones de las diferentes ramas de la matemática. Esto significa que el axioma se esconde detrás de muchos disfraces y juega papel primordial en la matemática actual [véase: Moore 1982 y Caicedo 1980].

Quizás la mayor de todas las paradojas
es que haya paradojas en la matemática.
Kasner y Newmann

Es seguro decir que ninguna actitud ha sido
completamente exitosa al responder las
cuestiones fundamentales, sino más bien
las dificultades parecen ser inherentes
a la propia naturaleza de las matemáticas.
Paul Cohen

Las paradojas y algunas soluciones propuestas

Cantor no solamente no pudo resolver algunas cuestiones fundamentales como la *Hipótesis del Continuo* o la tricotomía del orden en los cardinales sino que se dio cuenta de que su teoría encerraba paradojas. Otros matemáticos de su época como Bertrand Russell (1872-1970) o George Berry encontraron otras antonomias. Así que además de sus fuertes opositores por su manejo del infinito, como Kronecker y Poincaré para quien la teoría de conjuntos era un mal de cual algún día la matemática debía curarse, había serios problemas intrínsecos en su teoría.

Se dice que el primero en hacer pública una de las paradojas que presentaba la teoría fue Cesare Burali Forti (1861-1931) quien la comu-

9. El cursillo sería publicado en 1940 de las notas tomadas por George W. Brown bajo el título: *La Consistencia del Axioma de Elección y de la Hipótesis Generalizada del Continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos* [Gódel 1981, 195-204].

nicó el 28 de marzo de 1897 en un encuentro del Circulo Matemático di Palermo y que luego fue publicada en los *Rendiconti* [van Heijernoot 1967, 104].[10] El enunciado de la paradoja es bastante sencillo, dice: 'Siendo el conjunto de los ordinales bien ordenado debe tener un ordinal; pero este ordinal es a la vez un elemento del conjunto y mayor que todos'. Contradiciendo el hecho de que dado un ordinal siempre existe uno mayor. La paradoja está en que siendo O_n la colección de todos los ordinales bien ordenada, es posible encontrar dos ordinales, que no satisfacen la propiedad de tricotomía, esto es, no se cumple que $\alpha = \beta$ o $\alpha < \beta$ o $\alpha > \beta$.

Parece ser que desde 1895 Cantor era consciente de esta dificultad y de una situación análoga con los cardinales, llamada *la paradoja de Cantor* que consiste en lo siguiente: el conjunto de todos los conjuntos debe tener el mayor cardinal posible; sin embargo, al aplicar el teorema de que el cardinal de un conjunto siempre es estrictamente menor que el cardinal del conjunto de sus partes obtenemos una contradicción.

Cantor no fue el único matemático que a finales del siglo pasado trabajó en la fundamentación conjuntista del análisis. Gottlob Frege (1848-1925) elaboró un sistema formal que intentaba servir como fundamento de las matemáticas. Se basa en dos principios, el *Principio de Extensionalidad* (dos conjuntos son iguales si poseen los mismos elementos) y el *Principio de Abstracción* (toda propiedad define un conjunto). Desafortunadamente este sistema resultó inconsistente. Bertrand Russell, en 1902, escribió a Frege una carta en la cual le demostraba que su Principio de Abstracción llevaba a la contradicción siguiente: 'El conjunto de los conjuntos que no se pertenecen a si mismos, es a la vez, elemento de si mismo' [van Heijenoort 1967, 124].

Esta paradoja, que hizo una fuerte mella en la teoría de conjuntos, es particularmente importante ya que trata con el concepto de pertenencia, básico en la teoría de conjuntos. Frege tuvo que reconocer el fracaso de su sistema; lo hizo añadiendo como apéndice la carta de Russell al segundo tomo de su obra, *Grundgesetze der Aritnmetik*, que estaba en imprenta. Sin embargo, como dice Hatcher [1982, 98] aunque el sistema de Frege resultó contradictorio, la forma en que Frege hizo su análisis sobre los fundamentos de la aritmética no lo fue. La inconsistencia

10. Ahora se discute históricamente que el origen y desarrollo de esta proposición es mucho más complicado que lo que anteriormente se había supuesto. Hoy en día se argumenta que Burali-Forti no asevera haber descubierto dicha paradoja, sino que ésta se materializó a través de una discusión en torno a las obras de Russell, Jourdain, Poincaré y Bernstein, entre otros [véase: Moore y Garciadiego 1981]. Para comprender el origen y desarrollo de las paradojas conjuntistas véase, entre otros: Garciadiego 1985, 1986, 1992 y 1993].

de este sistema mostró, eso si, que ciertos principios intuitivamente naturales, tales como el principio de abstracción son falsos.

Muchas otras paradojas aparecieron por la misma época, las cuales no se refieren exactamente a la teoría de conjuntos sino a razonamientos plausibles que conducen a conclusiones inaceptables. Es el caso de las paradojas del mentiroso, de Berry y de Richard. El origen de estas paradojas que los griegos conocieron en diferentes formas es la paradoja de Euclides quien afirmaba: ‘Esta sentencia que estoy haciendo es falsa’. Si la afirmación es cierta es falsa y si es falsa es cierta. No hay manera de evitar el círculo vicioso.

La paradoja de Berry es un poco más refinada [véase: Garciadiego 1992]. Consideremos todas las expresiones del español que tienen menos de doscientas letras. Hay solamente un número finito de ellos. Consideremos además el conjunto de los números naturales nombrables por medio de estas expresiones, el cual es, obviamente, un conjunto finito y, por lo tanto, su complemento es no vacío. Tomemos el mínimo número de este complemento. Por definición es: ‘el menor número no nombrable con menos de doscientas letras’. Pero, la expresión anterior tiene menos de doscientas letras!

La paradoja de Berry es un caso especial de la paradoja de Richard que se basa en el método de la diagonalización de Cantor. Fue publicada en 1905 en la *Revue General des Sciences Pures et Appliquées* y consiste en lo siguiente: Consideremos todas las combinaciones posibles de dos letras, tres letras, etc. y pongámoslas en orden alfabético o lexicográfico. Entre todas estas combinaciones posibles consideremos las que definen un número real y entre éstas las que contienen solo un número finito de palabras. El conjunto E de los números reales definidos por estas últimas, resulta ser un conjunto bien ordenado y enumerable,

$$E = \{ p_1, p_{2,} p_3 .... \}.$$

Sea $s = 0.a_1\, a_2\, a_3$ ... un número real entre 0 y 1 definido como sigue: $a_n = d_n +1$ donde d_n es el n-ésimo dígito de la expansión decimal de p_n . Por lo tanto, s es un número real que no aparece en la lista y ha sido definido con un número finito de palabras, contradicción. ¿Cómo puede resolverse esta cuestión? preguntaba Richard a los editores de la *Revue* [Moore 1982, 104]. La definición de s requiere de la definición de E, conjunto al cual pertenece; esta situación de autoreferencia es bastante común en matemáticas y en los lenguajes ordinarios.

Henri Poincaré acuñó el término técnico ‘impredicativo’ para describir el tipo de auto-referencias que no podían usarse en matemáticas. Una definición de un individuo es impredicativa cuando requiere de la totalidad a la cual el individuo pertenece y lo caracteriza, para poder definirse. Desafortunadamente son muchas las definiciones en análisis que son impredicativas. Un ejemplo contundente es la definición de extremo superior de un conjunto ya que es el más pequeño elemento, mayor que cualquiera de los elementos del conjunto dado.

Si en matemáticas se prohibieran las definiciones impredicativas habría que excluir buena parte de ella. Hermann Weyl (1885-1955) en su libro *Das Kontinuum* [El Continuo] (1918) trató de hallar en qué medida podría ser reconstruido el análisis sin recurrir a definiciones impredicativas. Logró obtener una buena parte del análisis, pero no el teorema de que un conjunto no vacío de números reales que tenga una cota superior tiene una mínima cota superior [Kline 1972, 49]. Y ésta es nada menos que la propiedad que marca la diferencia fundamental entre el cuerpo de los números reales y el de los racionales.

El lógico ingles Frank Ramsey clasificó las paradojas en dos clases en su libro *Fundamentos de la Matemática* (1931). Las de la primera clase, llamadas paradojas lógicas, son aquellas que envuelven nociones directamente expresables en un lenguaje de la teoría de conjuntos, como son las paradojas de Russell, Cantor y Burali Forti. Las de la segunda clase, llamadas paradojas semánticas por Alfred Tarski, son aquellas que envuelven nociones como las de verdad o definibilidad. Ejemplos de paradojas semánticas son las de Berry, Richard y el mentiroso.

Alfred Tarski estudió las paradojas semánticas, muy especialmente la paradoja del mentiroso. Llegó a la conclusión de que estas antinomias se presentan porque los lenguajes en que ellas ocurren son lenguajes semánticamente cerrados. Esto es, lenguajes donde vale la lógica clásica y contiene además de sus expresiones los medios para referirse a las expresiones mismas. La solución que ofrece Tarski consiste en hacer una distinción entre dos lenguajes: el lenguaje objeto, aquel para el cual se define la verdad y el metalenguaje, aquel en el cual se define la verdad para el lenguaje objeto. La idea de Tarski, en su teoría semántica de la verdad, es similar a la que ofreció Hilbert como solución a las paradojas presentadas en la teoría de conjuntos de Cantor, cuando plantea la necesidad de colocar las teorías matemáticas en un nivel como sistemas formales completos y en otro nivel, que llama de la matemática, el estudio de la consistencia de dichos sistemas formales.

A medida que se fue desarrollando la teoría de conjuntos y la matemática basada en ella, fueron apareciendo aparentes paradojas cada vez más sofisticadas. Aparentes antinomias, porque son teoremas extraños e increíbles, lógicamente inatacables y que han de aceptarse aunque trasciendan la intuición y la imaginación. Es el caso de las llamadas paradojas de Skolem[11], Hausdorff[12] y Banach-Tarski.[13]

El que se adentra profundamente en el estudio de las paradojas desde las de Zenón hasta las antinomias modernas de la teoría de conjuntos no acepta fácilmente los argumentos de quienes creen haberlas resuelto. Sin embargo, las paradojas han sido bastante útiles en la ciencia y en la filosofía. Kant las usó para demostrar en la *Crítica de la razón pura* que la metafísica no puede ser una ciencia, Zenón Elea para atacar a los pitagóricos y defender la filosofía del continuo de su maestro, Parménides; Lewis Carroll las usó en sus cuentos de *Alicia en el país de las maravillas* y *Alicia a través del espejo* para distraer a los niños y sorprender a los adultos y Gödel se inspiró en las del mentiroso y de Richard para demostrar sus famosos teoremas sobre la incompletitud de la aritmética.

Soluciones a las paradojas de la teoría de conjuntos

Kronecker, Poincaré y Weyl, entre otros, como hemos anotado fueron fuertes opositores a la teoría cantoriana de conjuntos, Russell, Hilbert, Zermelo y muchos más, por el contrario sus defensores. En el *Primer Congreso Internacional de Matemáticas* en Zurich en 1897, Hurwitz y Hadamard mostraron aplicaciones de la teoría de los números transfinitos al análisis; pronto se encontraron aplicaciones a la teoría de la medida y la topología, convirtiéndose la teoría de Cantor en nuevo fundamento para las matemáticas. Las antinomias generaron diferentes respuestas por parte de matemáticos y lógicos interesados en los fundamentos. Las respuestas se pueden enmarcar en dos tipos: las que rechazaron la teoría por considerarla fundamentalmente errada y las que opinaban que la teoría era esencialmente correcta y había que acabar con la fuente de las contradicciones. Entre las primeras está la del holandés L. E. J. Brouwer (1881-1966) quien creó una escuela de filosofía matemática llamada intuicionismo. Entre las segundas se encuentran la de Russell con su escuela logicista y la de Hilbert con su pensamiento formalista.

11. Como consecuencia del teorema de Löwenheim-Skolem, se puede demostrar que existe un modelo de los números reales que es enumerable.
12. Para $n \geq 3$ no existe una medida finita e invariante para el grupo de desplazamientos de R^n.
13. La paradoja establece que una esfera tridimensional puede dividirse en varias piezas las cuales pueden reorganizarse de tal manera que se pueden obtener dos esferas tridimensionales iguales a la original.

Para los logicistas la matemática se reduce a la lógica; esto es, todo concepto matemático puede definirse por medio de nociones lógicas como las de conjunto, relación, implicación etc., y todo enunciado matemático puede ser demostrado a partir de principios lógicos, como los de no-contradicción y tercero excluido.

Las ideas originales del logicismo se deben a Frege y fueron redescubiertas más tarde por Russell. Frege opinó que dado que la matemática es independiente de la realidad física sus verdades también deben ser independientes. Tales verdades lo son, simplemente en virtud de la manera como usamos las palabras. Las verdades de la matemática resultan por lo tanto ser verdades universales y anteriores a toda experiencia (sintéticas a priori, según terminología kantiana). Resulta entonces válido intentar fundamentar la matemática en la lógica o sea derivar la matemática de principios lógicos. Esta derivación debe hacerse en un lenguaje formal en el cual se explicitan claramente las reglas de inferencia. Una verdad en tal sistema será un axioma o un teorema. Este programa propuesto por Frege y Russell fue completamente desarrollado en la famosa obra de Russell y Whitehead titulada *Principia Mathematica*, publicada en tres volúmenes en 1910, 1912 y 1913.

Para eliminar las paradojas, Russell creó la teoría de los tipos lógicos. Por esta teoría las diversas entidades de que trata la lógica como, individuos, clases, proposiciones, propiedades, etc. son dispuestas en una jerarquía de tipos distintos. Para los conjuntos, por ejemplo, se considera que los individuos tienen tipo cero, los conjuntos de individuos son de tipo uno, los conjuntos de conjuntos de individuos de tipo 2 y así sucesivamente. La teoría de tipos procura evitar un cierto círculo vicioso que se presenta al suponer que una colección pueda contener elementos definibles por medio de la colección como un todo, o sea pretende evitar que los elementos de la teoría sean definidos por medio de una definición impredicativa.

Kleene [1974, 82] afirma que cada una de las paradojas envuelve una definición impredicativa si se analizan cuidadosamente; excluyendo esta clase de definiciones mediante su teoría de los tipos lógicos, Russell consigue eliminar las paradojas en la teoría de conjuntos: un conjunto jamás podrá ser elemento de si mismo. Infortunadamente esta separación de órdenes hace imposible construir el análisis que requiere de las definiciones impredicativas; para evitar esta situación Russell postuló el *Axioma de reducibilidad*, el cual afirma que cualquier propiedad perteneciente a un orden mayor que cero, es equivalente a una propiedad de orden cero. Este axioma no gustó a la comunidad matemática; la complejidad de la teoría hizo que esta solución a las paradojas no tuvieran acogida.

La tesis intuicionista está basada en la idea de que los principios válidos para conjuntos finitos no pueden ser generalizados sin restricciones a los conjuntos infinitos. La teoría de conjuntos muestra un caso evidente de ello, al negar el principio, aceptado desde la antigüedad, 'el todo es mayor que la parte'. Brouwer no aceptó para los conjuntos infinitos el principio del tercero excluido: una proposición cualquiera o es verdadera o es falsa. Este principio, que es piedra angular de la lógica clásica, los intuicionistas lo rechazan pues consideran que entre lo verdadero y lo falso hay lugar para lo que no se ha verificado como verdadero ni reconocido como absurdo. Los intuicionistas han creado una matemática totalmente nueva, aunque menos poderosa (hasta el momento) que la matemática clásica al no aceptar el infinito actual y trabajar con el infinito potencial o constructivo. Sin embargo, tienen una teoría del continuo y una teoría de conjuntos (o 'especies').

El mismo año (1908) en que aparecía el primer artículo completo de Russell sobre su teoría de los tipos, Brouwer publicaba sus ideas sobre 'la no fiabilidad de los principios de la lógica' y Zermelo publicaba su artículo sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos. En este artículo Zermelo expone el primer sistema axiomático para la teoría de conjuntos que logra evitar las paradojas. El método axiomático, que había mostrado su fuerza desde los griegos es vigorizado por Hilbert y tomado como base de la escuela formalista encabezada por él. El formalismo es el resultado de la manera como Hilbert y sus colaboradores (Bernays, Ackermann, entre otros) atacaron la crisis causada por las paradojas y el desafío de Brouwer a la matemática clásica. El formalismo desea transformar el método axiomático, de técnica que es en la esencia misma de la matemática [da Costa 1977, 33].

El programa de Hilbert para las teorías matemáticas debía seguir tres pasos: axiomatización, formalización y demostración de la consistencia de la teoría axiomática formalizada.[14] La demostración de la consistencia se debía hacer en un lenguaje mucho más rico que el lenguaje formal de la teoría en cuestión y por medio de métodos especiales, para lo cual Hilbert creó un nueva rama de las matemáticas que llamó metamatemática. Esta tenía como objetivo estudiar las teorías matemáticas como un todo, investigando propiedades como las de consistencia, completez (completitud), decidibilidad, etc...

14. El segundo de los problemas propuestos por Hilbert en el célebre *Congreso Internacional de Matemáticas* de 1900 fue justamente demostrar la consistencia de la aritmética.

Para 1930 el programa formalista parecía tener éxito; Peano había axiomatizado la aritmética y Russell la había formalizado; existían dos 'buenas' axiomatizaciones de la teoría de conjuntos, la de Zermelo-Fraenkel y la de Gödel-Bernais-von Neumann, cuando Gödel mostró con sus teoremas de incompletitud que el programa de Hilbert no era posible. Sin embargo, el teorema de Gödel no cierra el camino de demostración de la no contradicción siempre que se prescinda, al menos en parte, de las restricciones de Hilbert referentes a los 'procedimientos finitistas'. De este modo llego Gentzen a demostrar en 1936 la no contradicción de la aritmética formal.

De las tres soluciones generales propuestas a las paradojas, el logicismo no tuvo mucha aceptación por la complejidad de la teoría de los tipos y porque el axioma de infinito de la teoría de conjuntos no puede obtenerse exclusivamente a partir de la lógica; el intuicionismo tampoco ha ganado aceptación general entre los matemáticos por su radicalismo y por excluir una buena parte de la matemática clásica; el formalismo finitista estricto también fracasó en sus intentos.

La matemática sigue usando como una de sus principales herramientas el método axiomático y así la solución escogida por la comunidad científica para evitar las paradojas fue la axiomatización de la teoría de conjuntos.[15]

La primera axiomatización de la teoría de conjuntos, como ya hemos mencionado, se debe a Ernst Zermelo (1871-1953) y fue publicada, en 1908, en su artículo "Investigaciones sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos" en los *Mathematische Annalen*. La idea básica de Zermelo tiene que ver con lo que Russell denominaba 'teoría de la limitación de tamaño' la cual procuraba evitar colecciones muy grandes como son: el conjunto de todos los conjuntos, el conjunto de todos los cardinales o el conjunto de todos los ordinales que llevaron a las paradojas. Zermelo considero que los conjuntos no son simples colecciones, sino que deben satisfacer ciertas condiciones y como él mismo dice se propone mostrar como la teoría creada por Cantor y Dedekind puede ser reducida a unas pocas definiciones y siete principios o axiomas que parecen ser mutuamente independientes

> no he podido aun demostrar que mis axiomas son consistentes aunque esto es ciertamente muy esencial; en lugar de esto me he confiado a señalar ahora y después de que las antinomias descubiertas hasta el momento

15. En la introducción a su libro *Teoría de Conjuntos*, Bourbaki dice: creemos que la matemática esta destinada a sobrevivir, y que las partes esenciales de su edificio nunca colapsarán con el repentino aparecimiento de una contradicción, pero no podemos pretender que esta opinión descanse en algo diferente de la experiencia.

fallan una y todas si los principios aquí propuestos son adaptados como base [van Heijenoort 1967, 200].

El sistema de axiomas fue mejorado por Adolf Fraenkel (1891-1965) y Thoralf Skolem (1888-1963) quienes lo formalizaron completamente evitando el problema que podía presentarse con el axioma de separación al no explicitar Zermelo lo que es 'una propiedad definida' en un conjunto.

Weyl fue otro de los matemáticos que criticó la vaguedad en la noción 'propiedad definida', esencial al axioma de separación, se preocupó por encontrar una formulación precisa de dicha noción. En 1917, definió como 'propiedad definida' una proposición que era de la forma $x \in y$ ó $x = y$ o era obtenida por un número finito de usos de la negación, conjunción, disyunción, cuantificación existencial y substitución de una constante por una variable. O sea, aceptaba únicamente las fórmulas bien formadas de una teoría cuyos símbolos primitivos, además de los lógicos, fueran los de igualdad y pertenencia. Sin duda Skolem estaba en la línea de Weyl, solo que Skolem restringió explícitamente la cuantificación a individuos solamente, mientras que Weyl, no. Así, Skolem trató el axioma de separación de Zermelo como un esquema de axiomas dentro de la lógica de primer orden [Moore 1982, 260-261].

En 1930 en un artículo publicado en la revista *Fundamenta Mathematicae* (la primera especializada en teoría de conjuntos) Zermelo propone una forma de axiomatización de la teoría de conjuntos muy cercana a lo que hoy conocemos como ZF. En ella propone siete axiomas: los de, extensionalidad, conjunto potencia, unión , del par (si a y b son conjuntos entonces $\{a, b\}$es un conjunto) en lugar del axioma de conjuntos elementales, y el axioma de separación que es alterado de la siguiente manera: "Si M es un conjunto y $F(x)$ una función proposicional (del primero o según orden) entonces el conjunto de los x que satisfacen $F(x)$ es un conjunto".

El último axioma, que Zermelo llamó *Axioma de Fundamentación*, procuraba evitar las cadenas infinitas de conjuntos con respecto a la relación de pertenencia ($\in$ cadenas). Dimitri Mirimanoff en 1917 había notado que el sistema de Zermelo de 1908 permitía las $\in$ cadenas descendentes $\ldots \in M_2 \in M_3 \in M_1$, pero las prohibió [Moore 1982, 261-262]. Fue John von Neumann (1903-1957) quien introdujo en 1925 un axioma que sí los prohibía y Zermelo [van Heijenoort 1967, 393-413], no se sabe si independientemente de von Neumann o influenciado por éste postuló: 'No existen sucesiones $\in$ descendentes'.

Para este axioma dio más adelante, una segunda formulación que afirmó ser equivalente a la primera y es la que se usa más comúnmente hoy en día: 'Todo conjunto no vacío A posee un elemento minimal'. Este último axioma tiene un carácter técnico. Nunca es usado en la matemática convencional dice Cohen [1966, 53], evita de inmediato la paradoja de Russell ya que prohíbe explícitamente que $x \in x$ para cualquier conjunto x.

Al analizar las paradojas y ver las contradicciones que podían resultar al aceptar como conjuntos las colecciones formadas por todas la cosas que satisfacen una cierta propiedad, Cantor comenzó a distinguir, entre dos tipos de multiplicidades a las que llamó 'inconsistentes' o 'conjuntos de inconsistentes' o absolutamente infinitos. Russell toma esta idea y la interpreta con su concepto de la limitación de tamaño. Von Neumann [1963] recoge ambas ideas y formula una teoría de conjuntos conocida como teoría de clases en la cual distingue entre clases y conjuntos. Los conjuntos son clases que pueden pertenecer a otras clases, mientras que las clases propiamente dichas, no. Así, todos los conjuntos son clases, pero existen clases que no son conjuntos. El sistema de von Neumann no fue dado en el lenguaje de los conjuntos y las clases, sino que usa como noción básica la de función. Este sistema fue traducido al lenguaje de primer orden por Skolem en 1938, mejorado por Bernays en publicaciones de 1937, 1954 y 1958 y por Gödel en 1940. Por esta razón la teoría de clases a que nos referimos se conoce como la teoría NBG. En esta teoría se toman como símbolos primitivos $\in$, = y $m(x)$, este último significando 'x es un conjunto'.

Las axiomatizaciones formales de la teoría de conjuntos fueron posibles gracias a los adelantos de la lógica matemática que se sucedieron paralelamente con los adelantos en teoría de conjuntos. La historia de la lógica matemática comienza con los trabajos de Boole a mediados del siglo pasado cuando decidió algebrizar la lógica aristotélica. Es hoy una rama independiente en matemáticas a la cual han dado su aporte grandes figuras como son Frege, Russell, Hilbert, Bernays, Gödel y Tarski.

La relación entre lógica y matemática es uno de los puntos que distingue cada una de las corrientes filosóficas matemáticas de comienzos del siglo. Para Russell y Frege, matemática y lógica se confunden, para Hilbert son ramas paralelas que se apoyan la una en la otra y para Brouwer la lógica matemática surge de la matemática. Lo que si es evidente es que la lógica si es herramienta indispensable para la matemática y junto con la teoría de conjuntos se han convertido en sus fundamentos. Sin embargo, Hatcher [1982, 312] nos hace caer en cuenta que las pruebas de independencia de Cohen muestran que hay varios modelos incompatibles de la teoría de conjuntos y por tanto no hay una fundamentación absoluta de la matemática. Pues ante la afirmación de que la matemática se reduce a la teoría de conjuntos habría que preguntarse, a cuál?

Además la nueva teoría de las categorías ha cuestionado la irreductibilidad de las nociones de conjunto y pertenencia y algunas de las construcciones que se han hecho en teoría de las categorías no pueden realizarse ni en ZF ni en NBG.

Beiträge zur Begründug der transfiniten Mengenlehre

Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos

Nadie mejor que Dauben [1979, 167] resume el significado de este trabajo de Cantor en la siguiente cita:

> Los *Beiträge zur Begründug der transfiniten Mengenlehre* fue para Cantor su último y más importante publicación matemática. Cuando se confrontó con la tarea de presentar su trabajo al escrutinio cercano de un foro escéptico si no hostil de sus contemporáneos, él al menos escogió presentar sus nuevas ideas revolucionarias en una forma directa y simple. Después de más de viente años y desarrollo y meticulosas consideraciones, el estaba preparado para resumir los elementos estrictamente matemáticos de su teoría.

Los *Beiträge* están compuestos por dos artículos separados dos años en el tiempo. Los conocedores de la obra afirman que aunque el podría haberlos publicado en el mismo año de 1895, quería probar su *Hipótesis del Contínuo* y al no lograrlo se decidió por hacer la publicación. Los *Beiträge* están compuestos de veinte numerales, los primeros once se encuentran en el primer artículo y el resto en el segundo como se puede observar en las reproducciones.

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.

Von

GEORG CANTOR in Halle a./S.

(Erster Artikel.)

„Hypotheses non fingo."

„Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus."

„Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia."

§ 1.

Der Mächtigkeitsbegriff oder die Cardinalzahl.

Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.

In Zeichen drücken wir dies so aus:

(1) $$M = \{m\}.$$

Die Vereinigung mehrerer Mengen $M, N, P, \ldots$, die keine gemeinsamen Elemente haben, zu einer einzigen bezeichnen wir mit

(2) $$(M, N, P, \ldots).$$

Die Elemente dieser Menge sind also die Elemente von M, von N, von P etc. zusammengenommen.

‚Theil' oder ‚Theilmenge' einer Menge M nennen wir jede *andere* Menge M_1, deren Elemente zugleich Elemente von M sind.

Ist M_2 ein Theil von M_1, M_1 ein Theil von M, so ist auch M_2 ein Theil von M.

Jeder Menge M kommt eine bestimmte ‚Mächtigkeit' zu, welche wir auch ihre ‚Cardinalzahl' nennen.

‚Mächtigkeit' oder ‚Cardinalzahl' von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hülfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird.

Mathematische Annalen. XLVI. 31

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.

Von

GEORG CANTOR in Halle a/S.

(Zweiter Artikel.)

§ 12.

Die wohlgeordneten Mengen.

Unter den einfach geordneten Mengen gebührt den *wohlgeordneten Mengen* eine ausgezeichnete Stelle; ihre Ordnungstypen, die wir ‚*Ordnungszahlen*' nennen, bilden das natürliche Material für eine genaue Definition der höheren transfiniten Cardinalzahlen oder Mächtigkeiten, einer Definition, die durchaus conform ist derjenigen, welche uns für die kleinste transfinite Cardinalzahl *Alef-null* durch das System aller endlichen Zahlen ν geliefert worden ist (§ 6).

‚*Wohlgeordnet*' nennen wir eine einfach geordnete Menge F (§ 7), wenn ihre Elemente f von einem niedersten f_1 an *in bestimmter Succession aufsteigen*, so dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

I. „*Es giebt in F ein dem Range nach niederstes Element f_1*".

II. „*Ist F' irgend eine Theilmenge von F und besitzt F ein oder mehrere Elemente höheren Ranges als alle Elemente von F', so existirt ein Element f' von F, welches auf die Gesammtheit F' zunächst folgt, so dass keine Elemente in F vorkommen, die ihrem Range nach zwischen F' und f' fallen.*"*)

Im Besondern folgt auf jedes einzelne Element f von F, *falls es nicht das höchste ist*, ein bestimmtes anderes Element f' dem Range nach als *nächsthöheres*; dies ergiebt sich aus der Bedingung II, wenn man für F' das einzelne Element f setzt. Ist ferner beispielsweise in F eine unendliche Reihe auf einander folgender Elemente

$$e' \prec e'' \prec e''' \cdots e^{(\nu)} \prec e^{(\nu+1)} \cdots$$

enthalten, doch so, dass es in F auch solche Elemente giebt, die

*) Es stimmt diese Definition der ‚wohlgeordneten Menge', abgesehen vom Wortlaut, durchaus mit derjenigen überein, welche in Bd. XXI der Math. Ann. pag. 548 (Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre pag. 4) eingeführt wurde.

El mensaje de los epígrafes es bastante significativo y en ellos observamos que Cantor se siente un 'enviado de Dios' para dar a conocer la teoría del infinito y espera que algún día su misión de revelar esas verdades llegará a tener el reconocimiento que merece: 1) No hago hipótesis; 2) No damos leyes al intelecto o a las cosas a nuestro arbitrio, sino como escribas fieles los recibimos y copiamos de la voz revelada de la naturaleza misma; y, 3) Llegará el tiempo en que a beneficio de repetidas y diligentes observaciones se harán patentes ciertas verdades que hoy ignoramos. La primera parte se abre con su ya famosa noción de conjunto

> Por un 'conjunto' entendemos una colección *M* de objetos bien determinados *m* distinguibles entre si por nuestra experiencia o nuestro pensamiento (a los cuales llamaremos 'elementos' de *M*).

que continuará con la de nociones de 'número cardinal' y de 'equipotencia' entre conjuntos. Dedica las siguientes tres secciones al definir en los cardinales una relación de orden y las operaciones algebraicas de adición, como el cardinal de dos conjuntos disyuntos, multiplicación, como el cardinal del producto cartesiano, y potenciación entre cardinales, como el cardinal de un 'cubrimiento', el de un conjunto *N* sobre otro *M*. Esta noción equivale a lo que conocemos como el conjunto de las funciones de *N* en *M*. ¿Por qué no definió Cantor la potenciación como una multiplicación abreviada? Simplemente porque hubiera requerido de una multiplicación con infinitos factores, lo que no podía hacer pues no contaba con las herramientas adecuadas. Sin embargo, Cantor ya había demostrado [véase sección 4 de la traducción] que la potencia del continuo era $2^{\aleph 0}$ y requería dar una definición general adecuada de potenciación entre cardinales transfinitos.

De suma importancia para su teoría era mostrar que los números transfinitos son los sucesores naturales de los cardinales finitos, por ello en la quinta sección Cantor escoge la noción de número natural en la que cada número es el sucesor de otro, esto es la definición de número natural a través de una inducción. Usará esta noción para definir 'conjunto finito' como el tiene cardinal finito y 'conjunto infinito', como el que tiene cardinal transfinito.

> Un único objeto $e_{o,}$ cuando lo consideramos como un conjunto $E_o = \{e_o\}$ corresponde al número cardinal que llamamos "uno" y denotamos con 1; tenemos que
>
> $$1 = \overline{\overline{E_0}}\ .$$
>
> Ahora se une con E_o otro objeto e_1, el conjunto unión se llama de tal suerte que $E_1 = (E_{o,} e_1) = (e_{0\ ,}\ e_1\ )$. El número cardinal de E_1 se llama "dos" y se denota 2:

$$2 = \overline{\overline{E_1}}\,.$$

> Mediante la adición de nuevos elementos obtenemos la sucesión no acotada de conjuntos $E_2 = (E_1, e_2)$, $E_3 = (E_2, e_3)$, ... que nos proporciona los restantes números denotados 3, 4, 5, … llamados 'números cardinales finitos'.

La definición de álef cero, el menor número cardinal transfinito, título de la sexta sección, muestra claramente la dependencia de la noción de números transfinitos de la teoría abstracta de conjuntos y específicamente de su noción de conjunto y su aceptación del infinito en acto; en otras palabras sin la aceptación de éste la definición de $\aleph_0$ no tendría sentido.

> La totalidad de los 'números cardinales finitos' n, nos proporciona el ejemplo más cercano de un conjunto transfinito; al número cardinal asociado a él lo llamamos 'áleph-cero', en símbolos $\aleph_0$, así que establecemos

$$\aleph_o = \overline{\overline{\{n\}}}\,.$$

En la sección probará que 'Todo conjunto finito E tiene la propiedad de que no es equivalente a ninguno de sus subconjuntos' y que, por el contrario, 'Todo conjunto transfinito T tiene la propiedad de que contiene un subconjunto T_1 equivalente a él', esta última propiedad había sido la propiedad 'anómala' que había encontrado Galileo y que Dedekind toma como la característica de los conjuntos infinitos. .

Es entonces lógico pensar en cuál es el siguiente cardinal transfinito de $\aleph_0$, cuál es el siguiente de éste y así sucesivamente. Cantor denotará estos cardinales por

$$\text{(A)} \qquad \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, ..., \aleph_n, ...$$

y formará con ellos un conjunto bien ordenado, similar al de los números finitos. Pero la sucesión (A) no contiene todos los números cardinales transfinitos. Cantor prueba la existencia de un cardinal más grande que todos los $\aleph_n$ y lo denota $\aleph_\omega$. El 'primer principio de generación' de números transfinitos le permite obtener $\aleph_{\omega+1}$, $\aleph_{\omega+2}$, ..., $\aleph_{\omega+n}$ y continuar sin límite.

En el numeral siete comienza su teoría de los tipos de orden la que le permitirá definir el concepto de número ordinal, uno de los conceptos básicos y centrales de su teoría. Cantor había introducido los números ordinales transfinitos en dos artículos publicados en 1880 y 1883 bajo el título de "Sobre el infinito, variedades lineales de puntos"**.** Abre la sección con la noción de 'simplemente ordenado':

> Llamamos a un conjunto M *simplemente ordenado* si se establece entre sus elementos m un cierto *orden*, respecto del cual para cualesquiera dos elementos m_1 y m_2 uno tiene *menor* y el otro *mayor* rango y de tal forma que para cualesquiera tres elementos m_1, m_2, y m_3 , si digamos m_1 tiene menor rango que m_2 y m_2 tiene menor rango que m_3 entonces siempre se cumple que m_1 es de menor rango que m_3 .

La relación así definida se notará como es usual como $m_1 < m_2$ o $m_2 > m_1$. Más adelante Cantor afirmará que todo conjunto ordenado M tiene un *tipo ordinal* definido o más brevemente un 'tipo' el cual denotará por

$$\overline{M}$$

y continúa 'esta es la noción general que se obtiene de M prescindiendo de la naturaleza de los elementos m pero considerando el orden entre ellos'. Y anotará que si se abstrae de un tipo ordinal

$$\overline{M}$$

también el orden entre sus elementos se obtendrá el número cardinal

$$\overline{\overline{M}}$$

del conjunto M. Vemos como la notación de Cantor destaca el hecho de que el cardinal de un conjunto se obtiene por un proceso de doble abstracción.

Para clasificar los conjuntos según su tipo de orden definirá Cantor la relación de similaridad entre conjuntos: Dos conjuntos M y N se llaman 'similares' y se nota $M \cong N$ si existe un isomorfismo entre ellos, esto es, una función biunívoca que preserve el orden. Muestra que es una relación de equivalencia y escoge las letras minúsculas del alfabeto griego para denotarlas. Resaltará que no es una noción arbitraria y que generaliza de manera natural la noción de contar. Mencionará en esta sección a los conjuntos bien ordenados que llamará números ordinales transfinitos a los que dedicará la sección 12 y da el nombre de ω al tipo de orden de un conjunto bien ordenado $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ en el cual $e_n < e_{n+1}$ y n recorre todos los números cardinales finitos, esto es el tipo de orden de los orden natural de los números naturales.

La sección octava está dedicada a la suma y multiplicación de ordinales**.** La 'adición' entre ordinales la define como el ordinal del conjunto unión, o sea si

$$\alpha = \overline{M} \quad y \quad \beta = \overline{N}$$

se tiene que

$$\alpha + \beta = \overline{(M, N)}\,.$$

Con ejemplos observará que en general $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$ ya que $\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$.

El 'producto' de dos ordinales α, β es el tipo de orden obtenido al tomar β copias de α y colocarlas una después de la otra en el orden de β. Prueba que la multiplicación es asociativa y distributiva con respecto a la suma entre ordinales pero no cumple la propiedad conmutativa.

Así como la adición repetida permite definir el producto entre ordinales, una multiplicación repetida permite definir la potenciación. Como hemos visto ni la suma ni la multiplicación entre ordinales son conmutativas lo que nos lleva a concluir rápidamente que las operaciones entre ordinales no se comportan muy bien. En realidad el estudio de las propiedades de las operaciones entre ordinales es una parte bastante extensa y altamente especializada de la teoría de conjuntos.

La novena sección está dedicada al tipo de orden de los números racionales que denotará por η y que caracteriza por no tener máximo ni mínimo con respecto a este orden y entre dos de sus elementos siempre se encuentra otro. Esta característica la llamará 'denso en todas partes'. La décima sección trata sobre las 'sucesiones fundamentales', son sucesiones crecientes o decrecientes, contenidas en un conjunto bien ordenado, prepara el camino para en la siguiente sección definir el tipo ordinal θ del continuo lineal *X*. En esta encontramos la noción de 'conjunto perfecto' como aquel en el cual todo conjunto acotado superioramente tiene un 'límite' (el conjunto es 'cerrado') y es 'denso en si mismo'. Así *X*, el continuo lineal, será un 'conjunto perfecto' y su tipo ordinal un 'tipo perfecto'. Este es uno de los resultados sobresalientes de la teoría cantoriana de conjuntos caracterizar el continuo como un tipo de orden.

La segunda parte de los "Beiträge" está dedicada a los conjuntos bien ordenados y su teoría de los números ordinales. En efecto, la sección duodécima está dedicada a la caracterización de los conjuntos bien ordenados, los cuales para Cantor ocupan una posición destacada entre los conjuntos simplemente ordenados; a sus tipos ordinales los llamará 'números ordinales'. Los identificará como aquellos que tienen un primer elemento y para los cuales todo subconjunto también debe tenerlo. El siguiente apartado siguiente está consagrado al concepto de 'sección' de un conjunto bien ordenado, noción que le definir un orden entre los ordinales y probar algunas de sus propiedades y de las propiedades de la suma, multiplicación y potenciación como casos particulares de las operaciones definidas en la primera parte entre tipos de orden.

A partir de la decimoquinta sección y hasta el final Cantor se dedica al estudio de $Z(\aleph o)$ los 'números de la segunda clase' la que define como 'la totalidad de los tipos de orden de los conjuntos bien ordenados de cardinalidad $\aleph o$'. Esta clase tiene un primer elemento que denotará ω y es el límite de los números naturales en su orden natural y tiene cardinal $\aleph_1$. Cantor demuestra así que la potencia de los números de la segunda clase es el segundo menor cardinal transfinito.

Kanamori [1996, 3] afirma: "La teoría de conjuntos nació el 7 de diciembre de 1873 día en que Cantor demostró que los números reales no son enumerables, y las siguientes décadas las dedicó a florecer a través de los prodigiosos progresos hechos por él en la teoría de números ordinales y cardinales." Invitamos al lector a seguir el texto original de Cantor en la excelente y cuidadosa traducción de en la cual se ha querido respetar al máximo el texto original; se trata, como hemos anotado, del último trabajo de Cantor, hecho especialmente para matemáticos, en el cual recoge los puntos esenciales de su teoría. Los invitamos a reconocer en sus páginas las ideas revolucionarias de la teoría de conjuntos, paraíso del que Hilbert afirma nadie podrá expulsarnos.

Referencias

ARISTÓTELES. 2001. *La Física*. México: UNAM.

BABINI, José. 1974. *Historia de las ideas modernas en Matemática*. OEA. Serie de Matemática No. 4.

BOLZANO, Bernard. 1991. *Las Paradojas del Infinito*. México: UNAM.

BOURBAKI, Nicolás. 1969. *Elementos de Historia de las Matemáticas*. Alianza Universidad.

CAICEDO, Xavier. 1980. "Matemáticas sin Axioma de Elección". *Matemáticas Enseñanza Universitaria*, No. 16.

CANTOR, Georg. 1915. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers.* Dover. Introducción de Philip Jourdain.

————.1976. "The concept of the Transfinite". *The Campaigner* $\mathbf{9}_{\mathbf{1\text{-}2}}$: 69-96

COHEN, Paul. 1963. **"**The Independence of the Continuim Hypothesis". *Proceedings of the National Academy of Sciences* **50**: 1143-1148; **51** (1964): 105-110.

————**.** 1966. *Set Theory and the Continuum Hypotesis*. W. A. Benjamín.

DA COSTA, Newton C. A. 1977, *Introduçao aos fundamentos da matemática*. Hucitec, Sao Paulo.

DAUBEN, Joseph. 1971. **“**The Trigonometric Background to Georg Cantor´s Theory of Sets”. *Arquive for the History of Exact Sciences.* **17**: 131-216.

————**.**1979. Georg *Cantor His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Harvard University Press.

————**.**1984. “El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana”, contenido en: Grattan-Guinness 1984, 235-282.

————**.**1990. “Georg Cantor y el Papa León XIII: Las matemáticas, la teología y el infinito”. *Mathesis* **6**: 45-74.

————**.**1995. “Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge”, contenido en Gillies 1995a, 49-71.

DEDEKIND, Richard. 1998. *¿Qué son y para qué sirven los números?* Alianza editorial. Traducción de los trabajos de Dedekind de 1872 y 1888. Introducción de José Ferreirós.

FERREIRÓS, José. 1991. *El surgimiento de la teoría de conjuntos 1854 -1908*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

GARCIADIEGO, Alejandro. 1985. “The emergence of the non-logical paradoxes of the theory of sets, 1903-1908.” *Historia Mathematica* **12**: 337-351.

————. 1986. “On rewriting the history of the foundations of mathematics at the turn of the century”. *Historia Mathematica* **13**: 39-41.

————. 1992. *Bertrand Russell and the origins of the set theoretic ‘paradoxes’*. Basel: Birkhäuser.

————. 1993. “The set theoretic paradoxes”, contenido en: Grattan-Guinness 1993 I, 629-634.

GILLIES, Donald. 1995a. (Editor). *Revolutions in Mathematics*. Clarendon Press-Oxford.

————. 1995b. “The Fregean Revolution in Logic”, contenido en: Gillies 1995a, 265-305.

GÖDEL, Kurt. 1981. *Obras Completas,* Alianza Universidad.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. 1984. (Editor). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Alianza Universidad.

————**.**1990. “Hacia una biografía de Georg Cantor”. *Mathesis* **6**:1-44.

————**.** 1993. (Editor). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. London. 2 vols.

————**.** 2000. *The Search for Mathematical Roots 1870-1940*. Princeton University Press.

HATCHER, William.1982. *The logical Foundation of Mathematics.* Pergamonn, Press.

HAWKING, Stephen. 2006. *Dios creó los números.* Crítica Barcelona.

KANAMORI, Akihiro. 1996. "The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen". *The Bulletin of Symbolic Logic* $\mathbf{2}_1$: 1-71.

KLEENE, Stephen C. 1974. *Introducción a la metamatemática*. Tecnos.

KLINE, Morris. 1953. *Mathematics in Western Culture*. Oxford University Press.

————. 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press.

MOORE, Gregory H. 1982. *Zermelo´s Axiom of Choice. Its origins, development, and influence.* Springer Verlag.

MOORE, Gregory y GARCIADIEGO, Alejandro. 1981. "Burali-Fortis's paradox: A reappraisal of its origins". *Historia Mathematica* **8**: 319-350.

RUSSELL, Bertrand. 1903. *Los Principios de las Matemáticas*. Cambridge at the University Press.

VAN HEIJENOORT, Jean. 1967. (Editor). *From Frege to Gödel*: *A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*. Harvard University Press. Cambridge.

VON NEUMANN, John. "An Axiomatization of Set Theory" contenido en van Heijenoort 1967, pp.393- 413.