Matemáticas y formalismo

Jean Cavaillès

Desde 1825, Gergonne distinguía entre matemática concreta y teoría formal de operaciones acerca de objetos arbitrarios. Pero la evolución durante el siglo XIX tendía a suprimir la primera en favor de la segunda. Intersecciones inesperadas y la aparición de nuevas vías mostraron, por las comparaciones que se provocaron, cuán multívoco era recurrir a la evidencia y, por otra parte, el peligro de trasponer, sin crítica, métodos intuitivos, buenos para un dominio especial (diferencia de tratamiento entre las sumas finitas e infinitas; carácter no conmutativo de la multiplicación para ciertos números complejos). De ahí la necesidad de unificar, generalizando y no asimilando; de precisar en lo sensible en lugar de imaginar: sistematización y simbolismo, los dos remedios habituales para las matemáticas a partir del momento en que aparecen dificultades y por medio de las que se fundan las teorías nuevas. Recurrir a ello para el edificio entero, transformado en sistema de símbolos no era, por otra parte, nuevo: es el viejo sueño del panlogismo.

Implica, en efecto, integrar la lógica al formalismo. La interrupción de los encadenamientos simbólicos por razonamientos claros haría inútil todo el esfuerzo previo: en una palabra, un salto intuitivo del pensamiento y se reintroducen las vinculaciones sensibles y las nociones de validez limitada. Si las matemáticas son, como decían Frege y Dedekind, una parte de la lógica, ésta no debe ser, a su vez, sino un juego mecánico de símbolos: proposiciones y razonamientos son llevados a materializaciones definidas de manera precisa. Se propondrán, originalmente, ciertos signos, en número restringido y fácilmente reconocibles: paréntesis, letras, etc.; algunas reglas de empleo les darán sentido: la reunión de ciertos signos en un orden conforme a dichas reglas constituirá una fórmula. En fin, ciertas fórmulas — o ciertos esquemas, es decir, fórmula en que se dejan blancos que pueden ser llenados con

Mathesis, 5 (1989) 579-584

categorías determinadas de signos — se proponen como válidas primitivamente: éstas serán los axiomas. Las reglas permitirán su combinación o su transformación para obtener nuevas fórmulas válidas: por ejemplo, la regla de sustitución que permite reemplazar en el axioma ciertos signos por otros; la regla de implicación gracias a la cual dadas dos fórmulas, una de las que se propone como válida. Si la otra, escrita tras la primera y tras el signo = (traducción de la antigua implicación) constituye una fórmula válida, se tiene el derecho a proponer como válida a la segunda. Reglas de empleo de símbolos, axiomas y reglas de transformación de fórmulas que no son, evidentemente, arbitrarias sino que se eligen de manera que permitan traducir los razonamientos intuitivos más habituales: esto es la lógica general. La constitución de una teoría particular se manifiesta por la introducción de nuevos símbolos que definen nuevos axiomas, complementados, a veces, con reglas nuevas (como la de inducción completa en la aritmética). Pero las reglas y axiomas primitivos son propuestos implícitamente al principio del desarrollo de una teoría; se ve, asimismo, el modo de subordinar una teoría a otra.

Toda demostración es un diseño, fórmulas escritas, unas abajo de otras, cada línea según las reglas de constitución de fórmulas, cada tránsito de una línea a otra conforme a las reglas de transformación. A la cabeza y, de tiempo en tiempo, líneas sin justificación: axiomas. Se ve el trabajo matemático reducido a la puesta en marcha de un inmenso mecanismo: lo imprevisto no puede surgir sino de axiomas nuevos. Propuestos éstos, —o reglas aferentes— un espíritu suficientemente poderoso podrá percibir todos los teoremas que son demostrables. La matemática es una combinatoria.

Se plantean, empero, dos cuestiones: ¿es posible engendrar de esta manera todos los objetos —o sistemas de objetos— a que se adhieren de hecho los razonamientos en la matemática histórica? Por otra parte, ¿se tiene la certeza de no obtener, con suficientes axiomas, las fórmulas rechazadas por aquélla? Nuestro formalismo universal, ¿es toda la matemática y nada más que la matemática? No se trata de una fidelidad de traducción: hay una sustitución y el formalismo quiere rebasar lo que reemplaza. Incluso es necesario que demostrar tenga sentido, es decir, que no toda fórmula sea demostrable. El primer problema es el de la perfección del formalismo; el segundo el de la no contradicción. Para una teoría particular, se conoce un método que resuelve el segundo problema: la aritmetización. Se representa cada símbolo por una cifra, se traduce cada axioma en una proposición aritmética verdadera: la teoría se transforma en una parte de la aritmética: si ésta no es contradictoria, aquella tampoco. Es un hecho que la traducción siempre es posible: incluso la lógica se deja tratar así. Pero esta feliz particularidad, ¿no es un indicio inquietante? Puesto que (la lógica) se deja representar por nuestro formalismo universal, ¿no es, en realidad, una parte de la aritmética?

Nos vemos llevados, así, al primer problema y, como precisa Skolem, a su solución negativa. Supongamos a todas las matemáticas actuales insertas en nuestro formalismo: será posible escribir todos los axiomas, uno a continuación de otro, o por lo menos, si tenemos esquemas, arreglarlos en una serie infinita numerable, es decir, numerada con la ayuda de los números enteros. Se puede, por ejemplo, escribir primero los que incluyen dos símbolos, luego los de tres, etc. Para cada número dado de signos no hay sino un número finito de axiomas (o una infinidad numerable si admitimos la posibilidad de sustitución en los blancos). Por lo tanto, la totalidad de los axiomas será, a lo más, un infinito numerable. Pero nuestros axiomas definen de manera exhaustiva los objetos matemáticos, es decir, estos no son otra cosa que el sistema de elementos arbitrarios que satisfacen a aquellos. Ahora bien, se ve, por la ordenación precedente, que es posible satisfacer los axiomas con un sistema infinito numerable de objetos: basta dar un nombre —un número de un orden particular— a cada uno de los signos que intervienen en un axioma. Como en cada axioma no interviene sino un número finito, jamás rebasaremos el infinito numerable. Es sin embargo, una verdad bien conocida que hay, por ejemplo, una infinidad no numerable de puntos sobre una recta o de decimales entre 0 y 1. Esto se ve por medio del procedimiento clásico de la diagonal: si se pueden arreglar todos los número decimales, unos bajo los otros, el procedimiento permite definir un número decimal que no pertenece al sistema, por ejemplo, el número cuya primera cifra corresponde a la primera cifra del primer número aumentada en 1, la segunda a la segunda del segundo más 1, etc.: cualquiera que sea el rango considerado, una coincidencia completa es imposible. Por lo tanto, las matemáticas en acto nos obligan a romper lo numerable, no se pueden someter a un formalismo universal. Sin duda se podrá responder que una parte (de las matemáticas) está siempre abierta, que nada impide aumentar nuevos axiomas que permitirán esperar nuevos objetos; por otra parte, el conjunto de objetos matemáticos efectivamente construídos no puede rebasar, incluso, lo finito. No hay, por ejemplo, sino un número finito de números trascendentes conocidos. Pero, ¿será necesario rechazar todos los razonamientos que toman como punto de partida el conjunto de todos los números trascendentes —todos los números reales? Ello sería una amputación en la que sueñan algunos matemáticos en momentos de depresión filosófica. Frente a la exigencia concreta de un problema, solamente cuentan la fecundidad y la armonía de los métodos. En cuanto a la noción de formalismo abierto, parece ser muy decepcionante. ¿Para qué sirve un formalismo si, frente a una cuestión nueva, no nos provee automáticamente, por lo menos, de un medio para buscar la respuesta? Incluso la garantía de no contradicción —que hiciere surgir la investigación— no puede ser dada por él.

No se puede demostrar, en un formalismo integral, la no contradicción de la aritmética: éste es el resultado obtenido por Gödel mediante un razonamiento parecido al de Skolem. Puesto que tenemos un número finito de símbolos y axiomas, siempre será posible numerar objetos y proposiciones aritméticas demostrables formalmente. El procedimiento de la diagonal —complicado— nos da el número de una proposición tal que su demostración o su refutación (es decir, la demostración de su negación) formales engendrarían, de la misma manera, una contradicción en la teoría. Esto se puede poner en forma. Si hubiera una demostración formal de la no contradicción de la teoría, añadiéndole el razonamiento anterior, se obtendría una demostración formal tanto de la proposición como de su negación: la teoría sería contradictoria. Se trata, modernizada, de la paradoja del mentiroso. Rebasa la aritmética y vale para todo formalismo absoluto —es decir, aquél en donde todo está definido por medio de un sistema delimitado de convenciones: si la teoría no es contradictoria, puede demostrar, ella misma, su no contradicción. Se puede, sin duda, apelar al recurso de las teorías más generales; fundar, por ejemplo, la aritmética sobre el análisis. Pero esto no tiene interés para el problema del formalismo: ¡qué significación, otra que imaginativa, puede poseer esta superposición indefinida de teorías cada vez más vastas cada una de las cuales no existe sino en tanto formal sino gracias a aquella que la domina!

Así, el simbolismo conquistador del siglo XIX desemboca en un doble fracaso. Hilbert, quien más ha hecho por su triunfo, jamás pretendió que fuera completo. Manejaba, más allá del juego mecánico de los signos, una "región irreductible del pensamiento concreto". Esta zona es más vasta de lo que él pensaba. En particular, el famoso problema de la "decisión" —que, resuelto, habría dado un procedimiento para reconocer si una fórmula dada es demostrable o no en una teoría— no parece examinable fructíferamente más que en casos muy especiales. Por otra parte, desde el momento en que que intervienen superposiciones complicadas de formalismos cuya coordinación en un sistema único no se realiza nunca y en donde se hace referencia a colecciones infinitas no numerables, no es posible darle un sentido. El matemático considera un pequeño diseño de objetos, provisto cada uno de un cierto número de grados de libertad —que, por apretados que sean, no fijan sino cotas a la infinidad de posibilidades de movimiento. Con un gesto —como un salto tras la liebre ("comme un saut après l'aguet")— cerrará la figura que había permanecido inacabada en el problema. Esto no es psicología: se puede retraducir lo que se ha hecho, tras hacerlo, a encadenamientos de lógica tradicional. Pero esto no es más que traducción: no hay primacía para un modo de vinculación, por otra parte tan espacial como los otros. Grassmann se quejaba de que se despojara a los razonamientos geométricos de su originalidad: la transposición analítica siempre es posible, frecuentemente artificial. Lo mismo en otros sitios: cada parte independiente de las matemáticas posee sus modos propios de encadenamiento, que la caracterizan. Se puede hacer un censo de los que existen y alinearlos, incluso, en una jerarquía. Será vano creer que una combinatoria cualquiera pueda dar cuenta de ellos. No hay, además, una combinatoria infinita —y si se quieren reducir estos gestos a elementos unitarios, hay que recurrir al infinito.

La axiomatización y la crisis del formalismo, no han sido trabajos inútiles. Han obligado al rigor, a la pureza de los pensamientos por eliminación de lo adventicio; han hecho aparecer parentescos imprevistos entre disciplinas diferentes. Pero no valen más que limitadamente. Grandes hiatos subsisten. Lusin se preocupaba por poder definir geométricamente, con facilidad, conjuntos totalmente fuera del alcance del análisis. Esta era, un poco, la situación de Pitágoras ante su diagonal: veinticinco siglos después, hemos sido reafirmados por un axioma que hace, por otro lado, un llamado a la intuición. No pocos escalones faltan en este edificio en devenir: con un poco de agilidad, se puede saltar de un punto a otro. Es también satisfactorio para algunos pretender que existe un plan total en donde todo está ligado: pero no es más que un en sí, requisito, posiblemente, del pensamiento coherente. En todo caso, inaccesible. Las dificultades se eliminan de la siguiente manera: el modo de ser de las intuiciones abstractas, la plasticidad de la materia permite las traducciones de una teoría a otra; sobretodo, el entrecruzamiento de los métodos, los "momentos solemnes" que regocijan a Brunschvicg y sus discípulos, tantos problemas que la reflexión filosófica no sabe resolver. La imagen de un gesto no debe engañarnos: por gratuita que parezca la invención de un método, el desarrollo de la matemática entera se sigue según un ritmo necesario: hay un condicionamiento recíproco de las nociones y de las ampliaciones que provoca su aplicación obligatoria en dominios vecinos. Precisar las modalidades examinando de cerca esta historia que no es una historia, puede ayudar a comprender, pero en ningún caso a definir si por definición entendemos reducción. El fracaso de la tentativa simplista en que toda la matemática sería llevada a la más pobre de sus ramas, el cálculo combinatorio, es un ejemplo suficiente. Inútil ensayar planes más ambiciosos, como quería Cantor con su teoría de conjuntos. La actividad matemática es objeto de análisis y posee una esencia: pero, como un olor o como un sonido, es en sí misma.