Teoría de conjuntos y lógica

Concepción Ruiz Ruiz-Funes

Abraham A. Fraenkel. *Set Theory and Logic*. Mass., Addison-Wesley, 1966. vii + 102 pags.

Pensar en el infinito no es cosa que se haga cotidianamente, para algunas personas este concepto inspira angustia, para otras futilidad. A él se asocia, por lo general, la idea de aquello que no tiene fin, de lo ilimitado, de la eternidad.

El libro de Fraenkel trata de un tipo muy particular de infinito:el infinito matemático, el cual la mayoría de la gente desconoce. A lo largo de este libro el infinito pierde su caracter de misterioso e irreal y se convierte en una herramienta útil y práctica para los matemáticos. A través de la historia el concepto de infinito ha suscitado muchas y diversas discusiones, filósofos y matemáticos de todas las épocas se han avocado a la tarea de definirlo y caracterizarlo. Hasta mediados del siglo XIX la idea que predominó entre estos pensadores fue la de infinito potencial, es decir la de un infinito no acabado.

La primera definición formal fue elaborada por Aristóteles, quien negaba que el infinito pudiese ser una especie particular de magnitud y lo definía como "aquello que por naturaleza no puede ser recorrido"[1]. Para él "la infinitud es una carencia, no una perfección sino una ausencia de límite..."[2] Esta concepción prevaleció en la mayoría de los filósofos griegos, inclusive entre los atomistas, quienes la usaban para defender la doctrina epicúrea de la infinitud del espacio.

Durante la Edad Media los filósofos escolásticos y los teólogos adoptaron la concepción aristotélica, y si bien aceptaban la infinitud de Dios no concebían esta cualidad en ninguna otra entidad concreta o abstracta. Roger Bacon,por ejemplo, negaba la existencia del infinito argumentando que si ésta fuera posible debía concluirse que la parte es mayor que el todo al cual pertenece. A pesar de que éstas eran las ideas que predominaban, la escolástica

Mathesis, 6 (1990), 107-113

medieval tuvo que enfrentarse a pensadores como Guillermo de Occam quien afirmaba:

> no es incompatible que la parte sea igual o no menor a su todo porque ello sucede cada vez que una parte del todo es infinita. Sucede también en la cantidad discreta o en una multiplicidad cualquiera en la cual una parte tenga unidades no menores de las contenidas en el todo. Así en todo el universo no hay partes en número mayor que en un haba, porque en un haba existen infinitas partes. De tal manera el principio de que el todo es mayor que la parte vale sólo para todos los compuestos de partes integrantes finitas[3].

En este aspecto, la valiente tarea de Occam de enfrentarse abiertamente al aristotelismo no logró atraer seguidores. Por el contrario, fue duramente repudiada, y gracias a ello los renacentistas recibieron una concepción del infinito intacta desde su creación por Aristóteles. Hombres que en otras ramas del pensamiento se enfrentaron sin temor a lo establecido y a la tradición científica heredada de la escolástica medieval, aceptaron sin cuestionarlo un infinito inalcanzable, inaccesible e irreal.

En este contexto, la filosofía y la matemática que se fueron construyendo desde el siglo XVII hasta la primera mitad del siglo XIX no aportaron, en esencia, cambios radicales en la manera de concebir al infinito. Este seguía siendo aquello de lo que se podía tomar siempre una parte finita y distinta a la anterior, aquello a lo que se le podía agregar partes nuevas y podía dividirse también en partes nuevas, esto es, tender a lo infinitamente grande o a lo infinitamente pequeño respectivamente, pero nunca a un infinito acabado.

Sin embargo existían hombres que pensaban que el infinito debía ser reconocido como una magnitud en si misma y trabajaban en ello. En 1847 un religioso de Bohemia llamado Bernhard Bolzano escribió un libro llamado *Paradojas del Infinito*.En esta obra se somete por primera vez al infinito un tratamiento matemático. Bolzano postuló la propiedad de los conjuntos infinitos de contener subconjuntos propios equivalentes a si mismos, pero no profundizó en el estudio y la sistematización del concepto de infinito. Sin embargo su aportación real a este campo de la matemática fue haber comenzado a construir el largo camino que unos años más tarde llevaría a Cantor a la conquista del infinito.

Cantor ha sido considerado como un personaje misterioso e inclusive raro. A lo largo de su vida tuvo momentos de mucha lucidez y momentos de terribles crisis nerviosas que inclusive lo llevaron a internarse en instituciones especializadas. En ellas pasó largos periodos en particular sus últimos días. En 1870, trabajando en la Universidad de Halle en el problema de funciones continuas y sus representaciones trigonométricas, comprendió que el verdadero problema radicaba en llevar a cabo un análisis suficientemente profundo del continuo. En esa época, Dedekind, quien trabajaba también en descifrar los misterios del continuo, había obtenido resultados tan importantes como el de que los racionales forman un subconjunto propio de los reales. El conocimiento de estos resultados permitió a Cantor ir desarrollando la Teoría de Conjuntos, contemplada no ya como una herramienta para el analisis, sino como una rama nueva de las matemáticas. Esta nueva teoría legitimó al infinito y lo saco de la obscuridad y el misterio en que estaba sumido. Permitió además, que se unificaran y desarrollaran muchas otras ramas de las matemáticas.

A pesar de todo, el trabajo de Cantor se enfrentó a muchos obstáculos. Matemáticos eminentes, como Kronecker, atacaron y condenaron esta nueva visión del infinito. Por ello Cantor se vio obligado --además de a desarrollar esta nueva teoría-- a defenderla:

> No obstante la diferencia esencial entre los conceptos de infinito potencial y de infinito actual (siendo el primero una magnitud finita variable que crece más allá de todo límite finito, y el segundo una magnitud fija constante, que se mantiene más allá de todas las magnitudes finitas) ocurre con frecuencia tomar el uno por el otro... En vista de la justificada aversión a tales infinitos actuales ilegítimos y a la influencia de la tendencia moderna epicúreo-materialista, se ha extendido en amplios círculos científicos cierto horror al infinito que encuentra su expresión clásica y su apoyo en la carta de Gauss; sin embargo me parece que el consiguiente rechazo, sin crítica alguna, del legitimo infinito actual no deja de ser una violación de la naturaleza de las cosas, que han de tomarse como son[4].

A pesar de la resistencia que presentaron algunos matemáticos, la obra de Cantor fue abriéndose camino. El nacimiento de la Teoría de Conjuntos trajo aparejado el surgimiento de problemas que si bien no habían sido totalmente desconocidos en la antigüedad, se presentaban ahora mas definidos: estos problemas conforman lo que hoy se conoce como "las paradojas de la lógica moderna". Grandes matemáticos y filósofos dedicaron gran parte de su vida a resolverlas:

> Pensé que este trabajo (Principia Mathematica) estaba casi terminado, pero en el mes de mayo (de 1901) sufrí un revés intelectual casi tan severo como el revés emocional que había sufrido en febrero. Cantor tenía una demostración de que no existe un número que fuera mayor que todos los demás y a mi me parecía que el número de todas las cosas del mundo debería ser el mayor posible. Por tanto, examiné su demostración con minuciosidad e intente aplicarla a la clase de todas las cosas que existen. Esto me llevó a considerar aquellas clases que no son miembros de si mismas, y a preguntar si la clase de todas esas clases es un miembro de si misma o no. Encontré que cualquiera de las dos respuestas implica su contradictoria......me daba la impresión de que el resto de mi vida se podría consumir mirando esa hoja de papel en blanco. (La Autobiografía de Bertrand Russell (1967))[5].

Así, la Teoría de Conjuntos hizo cimbrarse las estructuras sobre las cuales se había desarrollado por cientos de años la matemática, y dio pie a una gran polémica acerca de los fundamentos de ésta, sobretodo durante las primeras décadas de este siglo. Poco a poco los matemáticos fueron reconociendo la enorme importancia de esta nueva rama de la matemática.

En 1925 Hilbert escribía: "Nadie podrá arrojarnos del paraíso que Cantor nos ha creado." y es justamente esta frase la que expresa la esencia del libro de Fraenkel. Se rompen en él los esquemas rígidos que los matemáticos tienen de lo que debe ser un libro de texto, es una obra llena de imaginación que refleja la libertad que a la matemática imprimió la obra de Cantor. Es una verdadera apología de la Teoría de Conjuntos.

El libro está escrito en un lenguaje sencillo, está pensado (como lo indica el autor en el prefacio) para autodidactas, estudiantes de bachillerato y estudiantes de filosofía que busquen una introducción al tema del infinito. La historia es parte fundamental de esta obra. Fraenkel comienza con historia --historia de la matemática y del pensamiento humano en general-- y nunca la abandona. La mayoría de los resultados expuestos en el libro están rodeados de notas históricas que los realzan y les dan razón de ser, remarcando así la riqueza de la Teoría de Conjuntos.

El autor define desde un principio los conceptos elementales que se van a utilizar. A diferencia de otros textos, la noción de equivalencia entre conjuntos se da en las primeras páginas, y como consecuencia se hace necesaria la definición de cardinal. El primer tema que aborda de manera formal, y el que constituye la columna vertebral del libro, es el de los conjuntos infinitos, definiendo y explicando con claridad las propiedades y características inherentes al tamaño de estos conjuntos Al demostrar que todo conjunto numerable es equivalente a un subconjunto propio de si mismo, Fraenkel lleva al lector a emocionarse ya que el principio de que el todo es mayor que las partes, tan sólido en la antigüedad, queda ahora sin vigencia.

Hasta 1870 los matemáticos habían asumido que todos los conjuntos infinitos eran equivalentes, nadie había hablado hasta entonces de "distintos tamaños de infinito". Cantor demostró en 1874 que no existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números enteros y el conjunto de los puntos de una recta, es decir el continuo. En 1891, manteniendo la esencia de la demostración, pero tomando como continuo al intervalo de 0 a 1, elaboró una mucho más sencilla. Es ésta la demostración que Fraenkel reproduce en su libro, y no sólo intenta aclarar cualquier duda que de ella surja, sino que explica además que este tipo de demostraciones que utilizan el método indirecto son desde el punto de la Lógica totalmente válidas.

El autor plantea los problemas que se suscitaron en la Lógica conforme el dominio del infinito se fue consolidando. La presentación del Axioma de Elección en algunas de sus versiones inicia intuitivamente y termina con rigor matemático. Una vez más se evoca la historia del pensamiento filosófico y matemático y expone la acogida y el rechazo que tuvo dicho axioma. Filosofía y matemática van siempre de la mano en el libro; sin embargo, hace notar que el rechazo al Axioma de Elección tiene su origen en problemas de índole filosófica y no matemática. ESta aclaración resulta muy oportuna dada la importancia que este axioma tiene en varias ramas de la matemática.

Fraenkel va construyendo poco a poco la aritmética transfinita. Definiendo el conjunto potencia enuncia y demuestra el Teorema de Cantor, es decir, que dado cualquier cardinal siempre existe uno mayor. Expone el problema de la Hipótesis del Continuo y la Hipótesis Generalizada del Continuo con mucha calma, mientras plantea el revuelo causado por dichos resultados. Termina afirmando que los recursos de las matemáticas actuales no son suficientes para decidir el problema del continuo; la hipótesis $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ y su generalización son independientes de los axiomas de las matemáticas contemporáneas.

Se plantea enseguida un problema: no obstante los resultados hasta ahora planteados, existen abismos muy grandes que la Teoría de Conjuntos suscitó y no logra salvar; a saber, las antinomias. Centrando la atención en la paradoja de Russell, y mientras afirma que la contradicción es de naturaleza lógica y no se origina de una técnica matemática, Fraenkel introduce la axiomatica elaborada por Zermelo en 1908. Una vez más el lector parte de cero: tan solo posee en conjunto nulo, un conjunto infinito y una relación primaria no definida $\in$. Se aclara que colecciones como el Universo (la clase de todos los conjuntos) no son contradictorias por si mismas, y que la paradoja surge cuando se permite que sean elementos de si mismas o de otros conjuntos. En este punto hace por primera vez la distinción entre conjunto y clase propia, y excluye a estas últimas de la relación de membresía.

Contrariamente a lo que muchos matemáticos e inclusive el propio Cantor pensaba, este último logró demostrar en 1899 que el intervalo y el cuadrado son conjuntos de puntos equivalentes. Fraenkel expone el resultado y después de una breve explicación de la prueba, el lector se enfrenta por consecuencia a igualdades tales como: $\aleph_0^2 = \aleph_0$ y $\aleph_0^3 = \aleph_0$. El dominio del infinito es entonces inimaginable, y como continuación y bajo esta premisa se introducen los conceptos de buen orden y de número ordinal. El autor acelera el ritmo del libro, definiciones y teoremas se suceden unos a otros a gran velocidad, concluyendo con el Teorema del Buen Orden y su equivalencia con el Axioma de Elección.

En breve ésta ha sido una presentación esquemática del contenido del texto. No quisiera dar por terminado este escrito sin enfatizar que Fraenkel logra transmitir al lector las sensaciones y las emociones que fueron viviendo los constructores de esta nueva teoría. Poniendo de manifiesto su gran admiración y respeto hacia Cantor, expone de manera clara la mayor parte de los descubrimientos que la conforman. A lo largo de su libro establece que la Teoría de Conjuntos es la piedra angular de muchas ramas de la matemática, además de ser el principal lazo de unión entre ésta y la lógica. Concluye afirmando que la Teoría de Conjuntos debería ser incluida entre las grandes revoluciones científicas que han transformado nuestra visión del mundo.

El libro de Fraenkel no es simplemente una mera recopilación de resultados matemáticos, es mucho más que eso, es un análisis profundo y lleno de sensibilidad del desarrollo de la obra de Cantor.

Notas

[1] Aristóteles. Physicorum libri VIII, ed. Ross, Oxford, 1950. Citado en Abbaqnano Nicola. *Diccionario de Filosofía*. México, F.C.E. 1974, pag. 661.

[2] Aristóteles. Physicorum libri VIII, ed. Ross, Oxford. 1950. Citado en Abbaqnano Nicola. *Diccionario de Filosofía*. México, F.C.E. 1974, pag. 661.

[3] Ocaam. Quaestiones in IV libros, Sententiarum, Luqduni, 1495. Citado en: Abbaqnano Nicola. *Diccionario de Filosofía*. México, F.C.E. 1974, pag. 662.

[4] Cantor. Citado en Pastor, J. Rey y José Babini. *Historia de la Matemática*. Ed. Gedisa. España, 1985, Vol. II, pag. 197.

[5] Russell. Citado en *Revista Matemática*. Sociedad Matemática Mexicana. Segunda Serie, Número 6, Febrero 1970, pag. 3.