Mathesis **III 2**$_{2}$ (2007) 473-480.

De lo imaginario a lo complejo

César Guevara Bravo

Paul J. Nahin. 2007. *An Imaginary Tale. The Story of* $\sqrt{-1}$. Princeton University Press. 288 p.

En la historia de las matemáticas siempre han existido los imprevistos que llegan a dar lugar a la aparición de sombras de duda y hasta de desconcierto, pero esto mismo ha incentivado que el interés por estos temas se incremente con el paso del tiempo.

Desde los inicios de la matemática axiomática la seducción de lo imaginario e intangible ha estado presente, un caso son los griegos que tuvieron la presencia de situaciones atípicas a su marco conceptual, por ejemplo los números primos, los perfectos, los figurados, y así toda una serie de tópicos que llegan hasta la actualidad.

Otro tema siempre vigente desde los griegos, que transitó por los árabes y llegó a los renacentistas, fue el manejo de las cifras negativas. Los números negativos e incluso el cero generaban confusión ya que el uso de los números siempre estaba concebido en los positivos y en su relación directa con el espacio físico, por ello, el uso de los negativos no articulaba adecuadamente para asociarlos con la dimensión geométrica de los objetos en la naturaleza o los de la matemática misma. Así, sobre este argumento enfrentaron la dificultad para dar representación numérica a ciertos segmentos, los inconmensurables.

Por otro lado, la solución (es decir, la raíz) de ciertas ecuaciones daba lugar a la aparición de raíces de números negativos y, a pesar de que las enfrentaron los matemáticos árabes en la edad media, fue hasta el siglo XVI cuando se consideró su viabilidad como posibles soluciones. Entonces, desde los griegos se conoce la aparición de un tipo de números que se les puede llamar 'imposibles'.

En este contexto de las raíces de números negativos Paul J. Nahin publicó *An Imaginary Tale. The Story of* $\sqrt{-1}$.

La manera de abordar el tema puede ser diversa, por ejemplo, se puede hacer desde la perspectiva del desarrollo de pares ordenados, o con una visión geométrica de los complejos como operadores sobre los vectores en el plano. La forma en que el tema es tratado en este libro es atendiendo a los pasajes y personajes tradicionales en la historia de las matemáticas.

Nahin publicó en 1999 la primera edición de su libro y como todos aquellos que alguna vez han publicado un artículo o un libro saben que las diferentes opiniones aparecen poco tiempo después. Por ello, en la reimpresión de 2007 el autor agrega un prefacio en el que reconoce una serie de errores, pero también manifiesta su enojo a todos aquellos que considera que fueron duros con las opiniones de su libro, incluso, su molestia llega al uso de adjetivos —hacia sus críticos— poco usuales en un libro de este tipo. Pero el prefacio es interesante porque deja ver a los lectores —principalmente a los que inician en estos rubros— como se gesta un libro y, principalmente, que entiendan que todo aquél que publica un trabajo quedará bajo el atisbo de los lectores. Desde este punto de vista el prefacio es atrayente porque nos permite conocer de las contrariedades que producen en un autor las críticas de sus lectores, aunque cabe señalar que posiblemente el prefacio no es el mejor lugar para liberarse del enfado que generan las opiniones. Es importante que los lectores que inician su vida académica estén en antecedentes de lo que puede suceder cuando publiquen un trabajo, y que cualquier opinión siempre se tome con la madurez y la serenidad pertinente.

La introducción no tiene la característica de bosquejar el contenido del libro para tener una visión panorámica de lo que se encontrará en la obra. Aquí se presenta una introducción que tiene la finalidad de llevar al lector hacia algunos pasajes previos al siglo XVI —que es de donde parte el capítulo uno—, y para ello menciona el papiro de Moscú y la posibilidad de que aquí surgiera la necesidad de tener que afrontar raíces de negativos. Posteriormente, con este derrotero de los pasajes históricos toma el problema veintidós del libro seis de la *Arithmetica* de Diophanto [1959], y se sirve de el para ejemplificar que sólo se usan algunas de las soluciones que se generan al resolver ciertos problemas. Pero en su proceso para obtener las soluciones no se apega a lo que Diophanto realmente empleó, que es la construcción geométrica de la solución, esto es, aunque Diophanto expone de manera retórica los pasos para llegar a la solución no implica que no estuviera empleando la visión geométrica que predominó desde la época de Euclides. La manera en que Nahin expone el problema da lugar a creer que Diophanto manejaba tanto el lenguaje como las operaciones algebraicas que actualmente usamos para encontrar raíces de ecuaciones. Además, el problema veintidós de la *Arithmetica* se enuncia en un contexto diferente a como se presenta en *An Imaginary Tale*.

Nahin presenta un trabajo matemático con diferentes perfiles, entre lo histórico, novelado y teórico, y pretende que el libro sea accesible para estudiantes entre los preuniversitarios a los graduados, por ello hace acopio de pasajes históricos y hasta anecdóticos, y todo ello se justifica plenamente con la finalidad de que el tema sea lo más ameno para el lector. Aunque a lo largo del libro queda manifiesto este perfil, sin embargo, el capítulo uno está descontextualizado respecto a lo que ha sido $\sqrt{-1}$ antes del siglo XVI.

El libro inicia comentando la negativa de Pacioli —en la *Summa Arithmetica*— de que las ecuaciones cúbicas no tienen solución, y así aborda directamente la controversia entre del Ferro, del Fiore, Tartaglia, Cardano y Ferrari. Entonces, la forma de empezar el capítulo uno no es compatible con el perfil que pretende promover el autor, esto es, la manera en la que introduce el número imaginario es sin antecedentes, lo hace llanamente junto con la problemática algebraica de los italianos de mediados del siglo XVI. La restricción que tenían los italianos de esta época para aceptar sólo determinadas soluciones se circunscribe en la problemática de lo ‘imposible’ que se manifiesta plenamente desde los griegos. Los números imaginarios se enmarcan en el conjunto de las cantidades imposibles —como fue el caso de los negativos o el cero—, y todo se debe al concepto de número que aún dominaba el siglo XVI, que era el de la vinculación con la geometría de las magnitudes, o la geometría de los números figurados, donde incluso el uno —bajo ciertos conceptos— no podía ser un número.[1]

El contextualizar la aparición de los imaginarios dentro de las cantidades imposibles, daría al lector los elementos adecuados para que no sienta que ellos son sólo un obstáculo que tuvieron que enfrentar los matemáticos del siglo XVI. Se tiene que ir más allá y presentarlos desde una perspectiva de los orígenes de la misma concepción geométrica y filosófica que se tenía del número en la antigüedad y edad media.

Así, la solución de la cúbica es con lo que inicia el libro, y para este tema las fuentes de donde se pueden tomar datos son numerosas, se pueden consultar tanto fuentes primarias como secundarias para documentar el trabajo matemático de los protagonistas, así como la controversia entre ellos.[2] Empero, aunque no era necesario que Nahin propor-

1. Para tener una idea del concepto de número y magnitud que dominaba en esta época, véase el libro siete de los *Elementos* de Euclides [1994].
2. Para documentar el debate de la autoría de las ecuaciones, véase [Ferrari y Tartaglia 1974], [Tartaglia 1554, libro 9] y [Martín 2000].

cionara un estudio inédito —ya que el libro es presentado como un trabajo de divulgación—, quiso hacerlo diferente y presenta el tema desde una perspectiva que da lugar a las imprecisiones.

Desde el principio de su exposición usa la ecuación $x^3 + px = q$ —a la que llama reducida—, como si fuera un caso especial de la general $ax^3 + bx^2 + cx = d$, pero es sabido que Cardano con un cambio de variable

$$x = y - \frac{b}{3a}$$

en la ecuación general llega a la reducida, y ambas tienen la cualidad de que sus soluciones son las mismas, con la ventaja de que resolver la reducida estaba más al alcance de los algebristas italianos. Es importante mencionar —porque no se hace en el libro— que el cambio de variable se fundamenta —en términos geométricos— al extender un cubo de lado x a otro mayor de lado

$$x + \frac{b}{3a},$$

y no mediante un álgebra simbólica como se hace actualmente.

La manera en que Nahin expone la solución de la cúbica, que es a través de los valores de $u + v$, no es la más afortunada. Para resolver la cúbica —el procedimiento que usa se lo adjudica a del Ferro— Nahin considera la solución x de la forma $x = u + v$, posteriormente sustituye en la cúbica para obtener la igualdad $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) = q$, de aquí plantea un sistema de dos ecuaciones, que al resolverlo por sustitución de la primera en la segunda llega a una ecuación de sexto grado, que se resuelve como una cuadrática y, finalmente, toma la solución positiva que da lugar a obtener x. La contrariedad que aquí se presenta es que ésta no fue la solución de del Ferro, ni de Cardano y tampoco de Tartaglia. Como se sabe, la historia de la solución de la ecuación cúbica transita por la que tenía del Fiore, que se la heredó del Ferro, después la solución que descubrió Tartaglia, y que a su vez se la dio a Cardano y, por último, se tiene la que presenta este último es el *Ars Magna*, donde conjunta las de todos y la de él mismo.[3]

Como ya se mencionó, recurrir a las fuentes para encontrar las demostraciones y los pasajes históricos de la controversia algebraica no era difícil, sin embargo Nahin optó por otra vía que no era la de hacer uso de las fuentes históricas. Y lo más importante es que al lector no se le da la oportunidad de disfrutar las importantes demostraciones geomé-

3. Para información sobre el desarrollo de las ecuaciones cúbicas, véase [Freguglia 1994] y [Rivolo 1998].

tricas, típicas de la matemática árabe, aún vigentes en la Italia del siglo XVI.[4]

Lo que se podría considerar como la parte más importe en este ámbito de las raíces negativas y la solución de las cúbicas, son los casos llamados irreducible, esto es, cuando se tienen las ecuaciones del caso $x^3 = px + q$. Por ejemplo, para $x^3 = 15x + 4$, donde la solución de Tartaglia es

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\ ,$$

Y la presencia de la raíz negativa es evidente. Como se ve en el capítulo XXXVII del *Ars Magna*, Cardano ya no aborda el problema, considerando que está más allá del ámbito del entorno de su época, aquí se puede ver un acto de honestidad por parte de él, pero como se sabía que existían ecuaciones llamadas irreducibles que sí tenían una solución real, entonces el conflicto interno cobraba más relevancia.

Y el que viene a dar una respuesta a esta problemática es Bombelli, él deduce que la raíz cúbica de

$$2+\sqrt{-121} \text{ es igual a } 2+\sqrt{-1}\,,$$

y con ello puede calcular que

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1} \ + \ 2-\sqrt{-1} = 4,$$

así, se obtiene que 4 es una solución $x^3 = 15x + 4$.

Lo más sobresaliente de esta parte de las ecuaciones de Cardano y Bombelli —a la que Nahin no le da la relevancia adecuada—, es que ambos dan uno de los primeros pasos para fracturar la infranqueable barrera que relacionaba la interpretación geométrica de las ecuaciones y la restricción de las soluciones que podían ser admitidas. Recordemos que una de las razones por las que Cardano no aborda el tema de las ecuaciones de cuarto grado, ni los coeficientes negativos, fue porque ellos no estaban vinculados a las dimensiones y magnitudes de la naturaleza, esto es, las ecuaciones sólo tenían sentido para grado no mayor que tres, que eran la tres dimensiones del mundo físico. Pero es cuando Bombelli da uno de los primeros pasos para derrumbar esta limitante entre dimensión física y grado de la ecuación.

En el capítulo dos Nahin muestra algunos aspectos geométricos de $\sqrt{-1}$, y para ello toma algunos problemas del libro primero de la *Geo-*

4. Para la metodología que seguían los árabes en la construcción geométrica de las ecuaciones, véase [Rashed 1997] y [Joseph 1996].

metría de Descartes [1987], con los que tratará de mostrar la aparición de las soluciones imaginarias en la construcción de las ecuaciones cuadráticas.

Descartes [1987, 279-282] aborda la solución de lo que llama problemas planos a través de las ecuaciones $z^2 = az + b^2$. Para tal fin construye las soluciones mediante cuerdas y tangentes a círculos que él propone. Pero siguiendo las interpretaciones de los siglos anteriores, las longitudes negativas no se usarán, y en los casos donde se pudiera dar una raíz negativa él comenta la imposibilidad del caso, porque ello implica una contradicción con los mismos trazos de la construcción geométrica de la demostración. Por esto es que —en el libro uno— ni siquiera menciona la posibilidad de que se diera una solución imaginaria (o como él las llama 'improcedentes').

Pero si se trata de adecuar la posibilidad de que las raíces improcedentes aparezcan en un lugar donde no están —es lo que hace Nahin—, que es el libro primero de la *Geometría*, entonces se puede hacer, y así se puede agregar un análisis de la posible presencia de raíces imaginarias donde el mismo Descartes no lo mencionó.

El libro tercero de la *Geometría* contiene el estudio de los problemas sólidos, es decir, los problemas que se relacionan con polinomios de grado mayor o igual a tres. Descartes [1987, 338-349] usa (como en la parte anterior correspondiente al libro uno) nuevamente la construcción de la solución, y para el caso del polinomio de grado tres la solución se apoyará en la intersección de un círculo y una parábola. La diferencia con los problemas de las cuadráticas, es que Descartes ahora sí contempla la posibilidad de que se pueda dar la existencia de una solución con raíz de un negativo, a partir del impedimento de construir la solución. Es importante señalar que la aparición de raíces negativas no implica que ya se contabilicen como una solución (aunque dice que las soluciones de un polinomio dependen del grado mayor que éste contenga). Pero lo que sí es cierto es que Descartes ya menciona su existencia terminológica, cosa que en el caso del libro primero ni siquiera se contemplaba. Así, es hasta el libro tercero cuando Descartes menciona la cantidad de raíces de un polinomio, y en el libro primero no se hace mención de raíces imaginarias, por ello era más apropiado que Nahin usara los problemas del libro tercero de la *Geometría* y no los del primero.

Haber abordado a Descartes a través de una sección que no correspondía no fue la mejor decisión, se tiene que considerar que si lo hacía a través de esta obra, el capítulo de los problemas sólidos era el más adecuado para ver como se introducía la terminología de los imaginarios, y su aceptación como posible solución basado en la existencia de *n* soluciones para la ecuación de grado *n*.

El capítulo seis de *An Imaginary Tale* lo dedica principalmente al trabajo de Leonhard Euler y sus aportaciones a los números de la forma $\sqrt{-1}$. Aquí sería injusto hacer una crítica a lo escrito por Nahin porque sabemos que la obra de Euler es tan extensa, que tratándose de números complejos y funciones de variable compleja se necesitaría por lo menos un par de libros dedicados a las ideas que desarrolló y cómo fueron retomadas por sus sucesores. La exposición de Nahin se apega a los problemas más conocidos de Euler, como son la representación exponencial de los complejos, la función zeta, los productos infinitos, la función gamma, entre otros. Pero independientemente del enfoque que cada quien le quiera dar, existen referencias que podrían ser comunes a cualquiera de ellos, y es el caso de la descripción que hace de $\sqrt{-1}$ en sus *Elementos de Algebra*; los artículos de 1749 y 1751, donde aborda lo que hoy conocemos como raíces de la unidad, o el análisis de su demostración para el caso $n = 3$ del último teorema de Fermat, donde es importante observar la forma en que introduce la factorización de reales con complejos (véase [Edwards 1977, 39-57]).

Así, en *An Imaginary Tale* tenemos la visión personal de Nahin de los números imaginarios, que parte de la idea de un encuentro casi accidental de los algebristas italianos del siglo XVI y termina con los inicios del análisis complejo de Cauchy en el siglo XIX. Los ejemplos de las aplicaciones están presentes en el libro, principalmente los que corresponden a electrónica —no es extraño ya que la formación del autor es de ingeniero en electrónica.

Entonces, como ya se mencionó al inicio de esta reseña, se sabe que el capítulo uno adolece de un contexto lo cual da lugar a pensar que la idea de los números 'imposibles' surge en el siglo XVI. También es importante que el lector sepa que falta información acerca del desarrollo de los fundamentos axiomáticos que consolidaron la teoría de los imaginarios, y para ello se tiene que abordar el trabajo de Gauss y Abel, y así entender a los imaginarios no sólo como una extensión de los reales, sino concebirlos como un cuerpo algebraico con vida propia.

No cabe duda que este libro se recomienda como una lectura complementaria a los interesados en la historia, el álgebra y la física. El trabajo no pretende ser un libro de texto —el autor ya lo dijo en los preliminares—, así que no se le puede pedir a Nahin que el contenido cubra un programa determinado. El lector interesado en los números imaginarios debe de tener presente que en *An Imaginary Tale* no encontrará la historia de tales números, lo que encontrará es una recopilación, a juicio del autor, de algunas técnicas matemáticas de cómo abordar ciertos problemas a partir del siglo XVI, así como aplicaciones que aún son vigentes. Las partes donde recurre a la historia se deben de tomar como un complemento, sin considerar que esto es lo principal en la obra. Para que el lector se adentre en la historia de los imaginarios tendrá que consultar otras fuentes especializadas.

Referencias

DESCARTES, René. 1987. *La Geometría*. Madrid: Ediciones Alfaguara.

DIOFANTO. 1959. *Les six Livres Arithmétiques et le Livres des Nombres Polygones*. Traducción y notas de Paul Ver Eecke. París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

EDWARDS, Harold. 1977. *Fermat´s Last Theorem. A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. New York: Springer Verlag.

EUCLIDES. 1994. *Elementos* libros V-IX. Colección: Biblioteca Clásica Gredos No. 191. Madrid: Editorial Gredos.

FERRARI, Lodovico y Tartaglia, Niccolo. 1974. *Cartelli di sfida matematica*. Bresia: Ateneo di Bresia

FREGUGLIA, Paolo. 1994. "Sur la Théorie des équations algébriques entre le XVI et le XVII siècle". *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche*. XIV **2**:259-298.

JOSEPH, Gheverghese George. 1996. *La cresta del pavo real*. Las matemáticas y sus raíces no europeas. Madrid: Ediciones Pirámide

MARTÍN, Casalderrey F. 2000. *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas del renacimiento Italiano*. Madrid: Nivola libros y ediciones.

RASHED, Roshdi (Editor). 1997. *Histoire des Sciences Arabes*. París: Éditions du Seuil. Tomo II (Mathématiques et physique).

RIVOLO, M. T. 1998. "Il Calcolo delle Radici Quadrate e Cubiche in Italia da Fibonacci a Bombelli". *Archive History Exact Sciences*. **52**: 161-193.

TARTAGLIA Nicolo. 1554. *Quesiti et Inventione diverse de Nicolò Tartalea, Brisciano*. Libro nono. Venezia.