Mathesis **IV 1**$_1$ (2018) 125 – 137.

Fundamentos de la Matemática

César Augusto Pérez Gamboa[1]

Alberto Dou. 1970. *Fundamentos de la Matemática*. Barcelona: Labor. (2da ed. 1974). ISBN 84-335-5132-9. 137 pp.

El quehacer del matemático se ha cimentado en el convencimiento que demuestra 'verdades' o 'proposiciones verdaderas', ante la consideración que las matemáticas ofrecen verdades no triviales y que alcanzan el ideal de verdad absoluta. Una convicción de este tipo, no se puede determinar desde las mismas matemáticas, sino que la historia del concepto de verdad matemática corresponde a la historia de la filosofía. Pese a encontrarse esta noción en otra disciplina, su evolución ha tenido una influencia significativa sobre las matemáticas. Esta razón, hace indudablemente que el propósito central del libro de Dou sea analizar el valor de verdad matemática estudiando los fundamentos sobre lo que se basa [p. 8].

La noción tradicional de verdad matemática es la que se remonta al Renacimiento. En esta concepción no existe una gran distinción entre los objetos de los que se ocupan los matemáticos y los considerados por las ciencias de la naturaleza; para llegar a ellos, ante la posibilidad de ser

1. Centro de Investigación y Desarrollo del Pensamiento (Cideccyt).
Caperez.cideccyt@gmail.com

cognoscibles, se usa simultáneamente la intuición y el razonamiento en que no existía ninguna razón para dudar [Bourbaki 1976, 25]. Ahora bien, desde la concepción de los matemáticos griegos las reglas del razonamiento ha tenido que elaborarse en contacto con la experiencia, para poder llegar a ofrecer una completa confianza. Se tiene que la matemática griega llega, en la época clásica, a una especie de certeza empírica, en la que no se concibe que se pueda poner en duda las reglas de razonamiento.

En la evolución de la noción de verdad matemática, es necesario esperar hasta principios del siglo XIX, como afirma Bourbaki [1976, 26], para ver como los matemáticos descienden, desde Descartes hasta una posición muy matizada como la de los griegos. Se atribuye la primera divergencia a las concepciones clásicas a la construcción de la geometría hiperbólica desarrollada por Gauss, Lobatschevski y Bolyai a principios del siglo [Bourbaki, 1976, 29], obligando a abandonar las pretensiones del siglo anterior sobre la 'verdad absoluta' de la Geometría Euclídea. Este fenómeno histórico convierte al final del siglo XIX en el final de una dirección del pensamiento matemático.

Dou [p. 11] reconoce la importancia de la evolución de la noción de verdad matemática, la considera como una de las características más importantes de las matemáticas entre el rigor matemático y la creación y la intuición matemática. La presentación del libro está divida en dos grandes partes. La primera aborda el desarrollo histórico del método matemático [p. 13] en la que se presentan los fundamentos de las matemáticas griegas, para mostrar que es a los griegos a quienes se le debe atribuir la clara noción de método matemático en cuanto racional. La segunda parte, se ocupa de un análisis del método matemático en el que se presentan las diferentes escuelas del pensamiento matemático, ante la importancia que tienen los trabajos como los de Frege, Hilbert y Brouwer, a fines del siglo XIX; quienes dan una explicación suficientemente satisfactoria de la naturaleza de la racionalidad del método matemático.

En el capítulo uno, Dou presenta un somero análisis histórico de la composición de los *Elementos* de Euclides,[1] con el objetivo de mostrar que el cuerpo de verdades logrado en unos cuatro o cinco siglos por los matemáticos griegos nada tiene de trivial y es el primero de la historia de la humanidad. Descritos estos hechos, el autor realiza un análisis de los fundamentos de la matemática griega, en el que muestra la existencia de un método matemático, el cual tiene como esencia llevarlo al razonamiento con un resultado que no debe ser trivial, sino algo que se construye con un sistema de verdades profundas, coherentes e interesantes. Dou a esta actividad le llama 'razonar matemático' y señala que le corresponde objetos matemáticos. Al referirse a los objetos matemáticos, el autor de manera parcial y peligrosa presenta una concepción platónica de las matemáticas. Desde esta concepción considera que las entidades matemáticas aparecen espontáneamente en la mente, con características de universalidad e individualidad, abstractas y con una precisión asombrosa [p. 16]. Para dar mayor solidez a la presentación de esta posición platónica, Dou [p. 25] utiliza texto del diálogo de Platón escritos en la *República.* El autor presenta deducciones de otros aspectos de los fundamentos de la matemática griega a través del análisis de la estructura del libro los *Elementos* de Euclides, análisis que le permite a Dou mostrar el carácter necesario de las verdades matemáticas con una revisión del

1. Son muy escasas las noticias históricas que se tienen sobre la vida de Euclides. Proclo dice que vivió en el período 306-285 aC, en tiempos de Ptolomeo I, quién le invitó al museo de Alejandría. Con bastante seguridad, parece que se puede afirmar que Euclides estudió en Atenas, donde conoció los últimos resplandores de su foco científico, pasando luego a Alejandría bajo la protección de los lágidas. Su obra más notable, a la cual debe su inmortalidad, es la titulada *Elementos* que equivale a lo que hoy sería un tratado. Los *Elementos* rivalizan, por su difusión, con los libros más famosos de la literatura universal: *la Biblia*, *La divina comedia, el Fausto* y el *Quijote.*

razonamiento matemático. Esto lo realiza apoyado con los principios o axiomas generales o 'nociones comunes' y 'postulados' de los *Elementos*. El autor muestra que es necesario que se disponga de esta clase de proposiciones para actualizar el razonamiento matemático. Al tenor de esta idea, Dou describe la solución dada por Euclides en los *Elementos* al problema original de los objetos matemáticos primitivos. Finalmente, el autor señala insuficiencias de los *Elementos* de Euclides, que si bien algunas pueden considerasen como tales, en términos globales la revisión hecha por Dou es injusta al 'pedirle' a la obra de Euclides elementos que no corresponde al momento histórico de su escritura.

Dou en el segundo capítulo, presenta una breve síntesis de la historia del quinto postulado de Euclides,[1] en la que muestra la ruptura entre la consideración que este postulado por ser parte de un sistema de razonamiento debería poderse demostrar partiendo de los postulados explícitos de Euclides y de las veintiocho primeras proposiciones de libro primero de los *Elementos* y el planteamiento que el quinto postulado era independiente de los demás [p. 27].[2] El autor resalta que un paso importante en la posición de la independencia se encuentra en los trabajos de Jerónimo Saccheri (1667-1733) a través de la publicación del libro *Euclides vindicado de todo error*.[3] Dou en la consideración que el trabajo de Saccheri es incidente para los fundamen-

1. El quinto postulado equivale al siguiente planteamiento: Por un punto P exterior a una línea L se puede trazar en el plano determinado por P y L una línea que no corte a L.
2. La independencia del quinto postulado de Euclides da origen a la geometría no-euclidiana, la cual abolió la teoría de las 'verdades' matemáticas de Kant [Bell 1985, 88].
3. La tarea de Saccheri era la de demostrar que el sistema geométrico de Euclides, con su postulado de las paralelas, es el único posible en la lógica y la experiencia. Bell [1985, 358] afirma que el brillante fracaso de Saccheri es un ejemplo notable de la historia del pensamiento matemático en que se encuentra la inercia mental que produce una educación en la obediencia y en la ortodoxia.

tos de la matemática en lo que se relaciona con la intuición y la tradición, expone la obra de este matemático, en la que describe con detalle cuáles son los paralogismos que llevan a Saccheri a la exclusión de la hipótesis del ángulo obtuso y agudo del quinto postulado [p. 30]. En esta exposición, Dou no deja claro que el libro de Saccheri es una muestra de que la aparición de la geometría de Euclides a este jesuita y lógico es una verdad absoluta y eterna, como la única posible verdad matemática del espacio. Alrededor de la misma temática y coherente con la estructura del libro, Dou presenta una nota histórica muy somera en la que muestra los argumentos aportados por diferentes académicos como Lambert (1728-1777), Johann Bolyai (1802-1860), Lobachevski (1793-1856)[1] y Gauss (1777-1855), entre otros, en los que se refleja el acervo de conocimientos y actitudes matemáticas que mostraban la génesis de la geometría no-euclídeas [p. 34].

Para Dou es importante explicar la problemática de las geometrías elementales desde el punto de vista de los fundamentos y en el capítulo dedica buena parte a describir los postulados que se encuentran en la obra *Fundamentos de la Geometría* (1899) de la que hace referencia solamente a la geometría plana y detalladamente revisa los cinco grupos en que Hilbert divide los postulados [Dou 1974, 48]. Para finalizar la historia de los fundamentos de la geometría, el autor se refiere al trabajo de Riemann (1826-1866), particularmente a su tesis doctoral titulada *Sobre las Hipótesis en que se basa la Geometría* [p. 40]. Por último, Dou hace un análisis de las consecuencias para la fundamentación de la matemática que provoca la independencia del quinto postulado. Los resultados del análisis muestran que

1. Lamentablemente, Dou no le dedica un análisis similar al trabajo de Lobachevski a que le hace al trabajo de Riemann, pese que fue uno de los trabajos que constituía en la primera prueba de la independencia completa del quinto postulado [Bell 1985, 199].

sucesos como la relatividad de la geometría contribuyen a despertar una actitud crítica acerca de la naturaleza de los objetos propios de la geometría y aun de toda las matemáticas [p. 43].

En el tercer capítulo se aborda brevemente la aritmetización del análisis, que se da en el siglo XIX, momento histórico en que los matemáticos reflexionan sobre los fundamentos del cálculo infinitesimal y lo reconstruyen con rigor [p. 49]. El autor muestra que estos fundamentos no son reducidos sólo a la aritmética, sino a lo más problemático de la teoría de conjuntos.[1] Dou describe la evolución del concepto de función [p. 51] y realiza con interés la presentación de la creación de la recta real a través de las posiciones del continuo de Weierstrass (1815-1897) quien usa la clase de números racionales de Dedekind (1831-1916) que se vale de su artificio de las cortaduras y de Cantor (1845-1918) quien dio una tercera introducción a los números reales [p. 55]. El autor finaliza el capitulo aseverando que las consecuencias del desarrollo del sistema de números reales dado a finales del siglo XIX es el logro de los matemáticos de aritmetizar el análisis en dos sentidos: la liberación del análisis de la intuición geométrica y cinemática y, un segundo sentido, una reducción del análisis a la teoría de números acompañado inminentemente con una teoría de conjuntos como lo afirmó Poincaré (1854-1912) [p. 58].

La segunda parte del libro se inicia con la presentación del Logicismo, que se encuentra caracterizado por Dou como una doctrina sobre los fundamentos de la matemática que considera a la lógica como anterior o más fundamental que la matemática y que efectúa una reducción de los conceptos y métodos de inferencia matemática a los co-

1. Un texto que podría dar luces sobre esta problemática es: Fraenkel. [1976]. De manera más global sobre el tema se puede consultar los artículos: Kline [1992] y Bell [1985].

rrespondientes de la lógica [p. 59]. Para el autor es una necesidad determinar que es la lógica; por ello, presenta las definiciones de Gödel (1906-1978/1907-1995), Church (1907) y Leibniz (1646-1716). Dou describe la logificación del concepto de número [p. 61], lo que considera como el primer paso importante en la elaboración de la doctrina del logicismo. Al respecto el autor hace una descripción del trabajo de Frege (1848-1925) en particular de su obra *Fundamentos de la Aritmética* (1884) en la que se encuentran afirmaciones que contradicen las de Kant acerca de la naturaleza de la aritmética [p. 62]. Continua Dou de forma breve con la mención del trabajo de Peano (1858-1932) en que hace relevante sus aportes a la fundamentación con el establecimiento del rigor del análisis con su obra *Formulario de Matemáticas* [p. 64].[1] El autor presenta un hecho que influyó de manera significativa en el desarrollo de los fundamentos de las matemáticas, la aparición de las paradojas. Inicia presentando las paradojas lógicas en las que describe la paradoja de Cantor sobre la cardinalidad de dos conjuntos [p. 65] y la de Russell (1872-1970) que considera como la más famosa [p. 66]. Continua con las paradojas semánticas en las que indica la paradoja de Richard (1905), la de Berry (1906) y de Grelling (1908). Posteriormente, Dou explica en que consiste la diferencia entre ambas clases de paradojas y realiza algunas consideraciones [p. 68]. El autor comenta sobre el principio del círculo vicioso que es planteado por Poincaré y Russell [p. 69]. Acertadamente, Dou afirma que este principio es mucho requerimiento para evitar las paradojas y de darse excluiría parte importante de las matemáticas. Este primer capítulo termina con comentarios del autor, sobre la manera como se lleva a acabo la re-

1. Para complementar sobre el trabajo de Peano y el de su escuela italiana, en que se puede ver los intentos de construir un nuevo lenguaje universal y la elaboración de sus famosos axiomas, se sugiere consultar: Kennedy [1963], Peano [1979] y Rodríguez-Consuegra [1988].

ducción lógica de los teoremas matemáticos en el sentido de reducirlos a proposiciones lógicas verdaderas [p. 73].

En el capitulo dos, se proporciona una descripción detallada del formalismo. Se discute la axiomatización de las matemáticas en la que se muestra que las ideas fundamentales de Hilbert al crear la teoría formalista para la fundamentación de la matemática consiste en la intuición de que ha de ser posible establecer más allá de toda duda la validez de las matemáticas clásicas, incluso de las no constructivas, apelando al carácter finitista o finitario de las demostraciones matemáticas [p. 76].[1] Dou presenta una observación sobre las características de la axiomatización material y la formal [p. 77] elementos que son utilizados por el autor para presentar en líneas generales del programa de Hilbert, en la que hace una descripción, algo imprecisa pero suficiente para el objeto del libro, de lo que es un sistema o teoría formal. El autor hace ver que Hilbert, al admitir el empleo del infinito actual en las matemáticas, representa un salto a lo incomprensible y que se convierte en la razón primaria de la aparición de las paradojas. Para evitarlas, Hilbert crea la *Teoría de la Demostración* [Bewerstheorie] [p. 81], que tiene como pieza central la noción de consistencia del sistema formal [p. 83].

Dou, en el capítulo tres, con una exposición detallada, da a conocer lo que era en los años setenta el estado actual de la teoría formal de números la cual es derivada directa-

1. Hilbert fue sin duda un matemático genial. Marcó con su creatividad el conjunto de las disciplinas matemáticas de su época. Es el contexto histórico que Hilbert intervino, buscando resolver problemas cruciales de fundamentación de las matemáticas. Lideró la llamada *Escuela Formalista* que buscaba desarrollar la Matemática sólo a partir de la coherencia de su propio discurso, sin buscar parentesco de sus objetos básicos con la realidad. Es comprensible entonces que en el enunciado de sus veintitrés problemas, él haya querido elevar una suerte de panegírico, una exaltación omnipresente del método axiomático, de la aspiración última de insertar la Matemática en la Lógica, transformada en madre universal de las Ciencias.

mente de la obra de Hilbert. El autor define lo que es una teoría formal de primer orden, en la que indica los símbolos y fórmulas que la constituyen [p. 87], las variables ligadas y libres que permiten expresar una fórmula y termina este preámbulo de la definición de la teoría y su potencia formalizadora con las reglas de inferencia *modus ponens* y la generalización del cálculo proposicional y del cálculo de predicados respectivamente [p. 89]. Dou, en el estudio de la teoría de números *S*, describe los axiomas propios [p. 91] y la interpretación estandarizada [p. 92], a su vez; diserta sobre la extensión del modelo en donde cuestiona el alcance de la potencia de la teoría formal de número como formalización de la teoría aritmética de números [p. 96]. En una revisión de la aritmetización de la metamatemática efectuada por Gödel, el autor presenta temas como, las funciones y relaciones recursivas [p. 99], los números de Gödel [p. 100] y las funciones y relaciones expresables [p. 101]. Con estos cimientos, Dou converge en el famoso teorema de incomplitud de Gödel [p. 102].[1]

En el capítulo cuatro, se proporciona un análisis del intuicionismo desprovisto de elementos que ubiquen a esta forma de pensamiento matemático como una escuela de matemáticas. Una primera presentación y como parte de la estructura del libro, el autor describe un breve desarrollo

1. Transcurrido el primer cuarto de siglo, sin embargo, otro matemático alemán, especialista en Lógica, habría de cortar con las esperanzas del maestro Hilbert: Kurt Gödel probaba la incompletitud de las Matemáticas como sistema lógico. Un sistema lógico está constituído por proposiciones a las cuales se les asigna dos valores posibles, 'verdadero' o 'falso', según una determinada interpretación. Un sistema es completo si cada proposición en su seno es *decidible*, es decir, si se puede encontrar para ella una interpretación que le asigne alguno de los valores posibles antes mencionados. Gödel probó que en todo sistema lógico, suficientemente vasto para poder incluir la Aritmética, existen proposiciones no decidibles, vale decir, dicho sistema no es completo. ¡Catástrofe! (para la escuela formalista), pues eso significaba que se debía abandonar el sueño de considerar la Matemática (que es incompleta) como parte de la Lógica (que es completa).

histórico de la matemática intuicionista, en donde se afirma que toda la matemática griega y particularmente la aritmética es intuicionista. Dou indica que después del surgimientos de las matemáticas no intuicionistas, iniciada por Dedekind, con el problema de la continuidad de la recta y la aritmetización del análisis, el trabajo de Fregel y las elaboraciones de Cantor, tiene génesis la teoría intuicionista fundada por Brouwer con expositores como Heyting, Kleene y Lorenzen [p. 114]. Ahora bien, en una caracterización del intuicionismo matemático, Dou indica dos elementos fundamentales: el principio de construcción o de constructibilidad en que se plantea que el objeto del intuicionismo matemático es una construcción mental, cuyo origen según Dou puede ponerse en la construcción de los números naturales [p. 115]. Un segundo elemento es la intuición matemática, misma cuya actividad potencia y su manera de ser condiciona los objetos matemáticos construidos. El autor, en un señalamiento fuerte e injusto con respecto a la naturaleza de estos fundamentos y de la filosofía de las matemáticas, los ubica en el plano prematemático, agregando una advertencia que la ambigüedad del campo filosófico no tiene porque invalidar la meridiana claridad de la matemática intuicionista [p. 116]. Desde el intuicionismo se presenta la determinación del número natural, en el que se tiene que los números naturales no se deducen 'lógicamente', ni se postula existencialmente unos axiomas, sino que se construyen inmediatamente en la mente del matemático y su valor objetivo o su verdad se basa directamente de la evidencia de la intuición [p. 117]. Dou toma del texto de Heyting, observaciones sobre el inicio y desarrollo de la matemática intuicionista, donde se diferencian los conceptos intuicionista de la matemática clásica [p. 120]. Posteriormente, el autor presenta una idea del cálculo proposicional intuicionista en que se plantea la existencia de los conectivos [p. 121] y la negación intuicionista [p. 123] en la que el autor asevera que no necesariamente una proposición intuicionista debe ser un teorema. En una insistente posición de debilitamiento de la matemática intuicionista, Dou al presentar el principio de contradicción, infiere que los conceptos del intuicionismo no pueden ser totalmente claros y limpios de manera que se pueda estar totalmente de acuerdo de que no surgen dudas acerca del concepto mismo [p. 124]; a su vez, muestra que la aplicabilidad del principio de contradicción da lugar a diversas clases de intuicionismo. Por otra parte, Dou afirma que el principio del tercio excluso no puede aplicarse a esta clase de matemáticas [p. 126]. El autor hace una descripción de la lógica formal intuicionista en la que se muestra que al combinar el cálculo proposicional clásico y los cuatro elementos conectivos: Conjunción, disyunción, implicación y negación, y diez axiomas que se enlista en el libro se tiene el cálculo intuicionista totalmente definido [p. 127]. Finalmente, Dou realiza minuciosamente una comparación de esta teoría con el logicismo [p. 131] y el formalismo [p. 132].

Se tiene que Dou cumple de forma relevante el propósito de su libro, ya que al analizar sobre la verdad matemática, se deslumbra la noción de fundamentos, en la que se encuentra que lo intencional del conocimiento matemático debe ser isomorfo con una realidad que para el logicista o el matemático clásico se encuentra en el mundo; para el intuicionista dicha realidad fundamental está en la conciencia y para el formalista se encuentra en el esquema trascendental del entendimiento humano. Con relación al carácter del libro y los lectores a quienes está dirigido no es aceptada el planteamiento de Dou, pues el libro puede ser considerado más bien como un libro para cursos de matemáticos o historia de las ideas y no para todos los bachilleres.

Con respecto al título del libro, este muestra la concepción de las matemáticas que tiene Dou considerándolas Matemática en un sentido de su unificación y pese que su estudio describe claramente el desarrollo de ‘los fundamentos de las matemáticas’ [véase: Bourbaki 1976], que se ha venido realizándose desde el principio del siglo XIX, Dou excluye del título de su trabajo la denominación de 'los' fundamentos, posiblemente para dar espacio a considerar la existencia de otras interpretaciones de este desarrollo histórico.

Se tiene un libro que presenta abundantes citas bibliográficas al final de cada capítulo y sugerencias de lectura para ampliar el panorama expuesto por el autor. Con un lenguaje accesible que permite al lector comprender los argumentos que exhibe Dou para arrojar luces sobre la importancia de la verdad matemática y sus fundamentos. Para finalizar se invita a leer este libro que se convierte en una lectura necesaria para iniciar en el estudio de la historia del surgimiento de una nueva rama de las matemáticas conocida como 'fundamentos de las matemáticas'.

Referencias

BELL. E. 1940. *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica. (2ª ed 1985).

BOURBAKI, N. 1976. *Elementos de Historia de las Matemáticas*. Alianza. Madrid. (2ª ed. 1976).

FRAENKEL. A 1976. *Teoría de los Conjuntos y Lógica*. México: UNAM. (Instituto de Investigaciones Filosóficas. Cuaderno No 31).

HEYTING. A. 1956. *Intuitionism. An Introduction.* Amsterdam. North-Holland Publishing Company.

HILBERT. D. 1899. *Fundamentos de la Geometría*. Madrid. Publicaciones del Instituto Jorge Juan de Matemáticas. 1953.

KLINE. M 1992. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, III*. Madrid: Alianza Editorial.

KENNEDY. H. 1963. "The mathematical philosophy of Giuseppe Peano". *Philosophy of Science* **30:** 262-266.

PEANO. G. 1889. *Los principios de la Lógica Matemática*. Oviedo, España: Pentalfa ediciones. 1979. Introducción, versión castellana y bio-bibliografia de Julian Velarde L.

PLATÓN. *La República*. Madrid. Sociedad Española de Librería.

RODRÍGUEZ CONSUEGRA. Francisco. 1988. "La obra logicista de Peano y su Escuela". *Mathesis* **4$_{2}$:** 221-299.