■ *artículos* ■

Filosofía y matemáticas en el siglo *XVIII*

Antonio Antolín

El análisis en el siglo XVIII y la cuerda vibrante.

Este es un estudio de un caso. Examinaré la relación entre las matemáticas y la filosofía en el siglo XVIII en el contexto del bien conocido debate de la cuerda vibrante.

La controversia no es el pan de cada día de los matemáticos. Y la controversia prolongada es aún más inusual. Cuando ocurre ésta, señala que están implicados los principios de la disciplina dentro de la cual se formula el asunto bajo controversia.

Durante toda la segunda parte del siglo XVIII, los principales matemáticos de Europa se ocuparon ellos mismos de un debate sobre una cuestión aparentemente técnica en el análisis que, según las apariencias, parecería no comprometer a los principios del tema. El debate era acerca de las soluciones de una ecuación diferencial, una que describe el movimiento de una cuerda tensa —la ecuación de onda unidimensional de los textos modernos. Describiré este debate solamente en su bosquejo general.

Aunque el estudio matemático de la vibración de cuerdas musicales se remonta hasta los pitagóricos, su historia moderna empieza con la obra de Brook Taylor *De motu Nervi tensi*, presentada a la Royal Society en 1712, pues aquí encontramos la primera aplicación de la Segunda Ley de Newton al problema de la cuerda. Sin embargo, Taylor no obtuvo la ecuación del movimiento que es central para el debate.

La ecuación de la cuerda vibrante —una ecuación diferencial parcial de segundo orden— fue obtenida y resuelta primeramente por Jean le Rond D'Alembert a fines de 1746, usando uno de los resultados de Taylor. Al año siguiente, D'Alembert presentó dos artículos sobre el tema a la Academia de Berlín. Su propósito era mostrar que la teoría de Taylor sobre el movimiento de una cuerda era excesivamente restrictiva. D'Alembert hizo esto criticando la argumentación de Taylor y a la vez obteniendo de su propia teoría una clase infinita de movimientos suprimidos por Taylor.

Mientras exponía las limitaciones de la teoría de Taylor, D' Alembert tuvo que enfrentarse a las suyas propias; éstas, sin embargo, no las consideró como faltas, sino como condiciones de la existencia de solución al problema. Uno de los tres casos examinados por D' Alembert bastará para aclarar la naturaleza de tales condiciones.

Supóngase una cuerda de longitud L que se encuentra en su posición de equilibrio, es decir, estirada a lo largo de un eje coordenado, desde el origen hasta el punto de abscisa L. El movimiento de la cuerda estará descrito, y se establecerá que ocurre en un plano y que el desplazamiento de la posición de equilibrio permanece pequeña todo el tiempo, expresando el desplazamiento de abscisa x como una función de x y del tiempo t. D'Alembert encontró la siguiente solución general para la ecuación de la cuerda vibrante:

$$(1) \qquad y=F(x+t)+G(x-t);$$

aquí F y G hasta el momento representan funciones sin restricciones. Supóngase ahora que a la cuerda se le hace salir de su posición de equilibrio a una forma dada, $y=f(x)$, y entonces se le suelta sin impulsarla; la ecuación (1) debe hacerse corresponder con esta condición inicial y asimismo con la condición de que los puntos extremos permanezcan sin poderse mover en todo momento. La primera condición produce (corresponde a $t=0$)

$$(2) \qquad (x)=F(x)+G(x);$$

y la segunda da

$$(3) \quad (i) \quad 0=F(t)+G(-t) \text{ y}$$

$$(ii) \quad 0=F(L+t)+G(L-t) \text{ para todo } t;$$

se sigue de (2) y (3i) que $F(x)=F(x)-F(-x)$, de modo que la forma inicial de $f(x)$ es una función impar; de (3) se sigue que $F(t+L)=F(t-L)$ para todo t: en otras palabras, F es periódica con periodo $2L$ y análogamente f, según se puede ver a partir de la ecuación

$$f(x) = F(x) - F(-x).$$

Así vemos cómo llegó D'Alembert a una conclusión inesperada: el problema de la determinación del movimiento no siempre se puede resolver. En el caso recién examinado, el problema admite una solución solamente si sucede que la forma dada inicialmente a la cuerda sea la gráfica de una función que sea a la vez impar y periódica. Como una función periódica que tiene un cero tiene un número infinito de ellos, tiene que ser trascendente o, en la terminología de D' Alembert, mecánica. Es decir, los casos imposibles de D'Alembert incluyen a todos aquéllos en los que la forma inicial dada a la cuerda esté descrita por expresiones algebraicas, como es el caso en que la cuerda se pone en movimiento tirando de ella.

La contribución de Euler

Mientras D'Alembert podía vivir con una solución a un problema mecánico estándar que se aplicaba solamente bajo condiciones restrictivas, Euler no podía. En 1748, Euler presentó un artículo a la Academia de Berlín en el que encontró una ruta para rodear la dificultad: la forma inicial de la cuerda siempre se puede extender fuera del intervalo [*0, L*] a una curva impar y periódica. De hecho, es suficiente reflejar el arco original respecto a sus extremos, luego se hace lo mismo con los arcos resultantes respecto a sus extremos, y así sucesivamente; de esta manera la restricción se elimina y el desplazamiento inicial puede asignarse de manera arbitraria.

La idea de Euler es a la vez sencilla y brillante, pero requiere que la extensión impar y periódica de un arco *arbitrario* sea considerado como una función ordinaria.

Empieza el debate

Incluso a un estudiante moderno, el truco de Euler podría parecerle sacado de la manga; ciertamente pareció así a D'Alembert, quien sintió que la contribución de Euler era puramente arbitraria; que el desplazamiento inicial de la cuerda poseía o no poseía las propiedades requeridas y que ninguna manipulación que decidiera llevar a cabo algún matemático podría alterar ese hecho.

Más allá de esta incomodidad, D'Alembert tenía un señalamiento importante: argumentó que el análisis tenía que ver con las *funciones*, entonces sinónimo de simples expresiones algebraicas, y que no había garantía de que también se pudiese aplicar a las curvas de Euler, cuya representación generalmente requiere de un número infinito de expresiones. Por ejemplo, si la posición inicial de la cuerda está dada por $y = x(L-x)$ sobre el intervalo $[0, L]$, su extensión estará dada por $-\alpha(L+x)(2K+x)$ sobre $[-2L, -L]$, por $\alpha x(L+x)$ sobre $[-L, 0]$, etc.

Euler estaba en posición de poder apreciar el señalamiento de D'Alembert, dado que fue Euler mismo quien había redefinido al análisis como la ciencia de las expresiones algebraicas en su famoso texto *Introductio in analysin infinitorum*, en un intento por desgeometrizar al cálculo.

El tercer hombre

Daniel Bernoulli (1700-1782) había reflexionado largo tiempo y profundamente sobre las cuerdas vibrantes en general hacia 1730. Cuando aparecieron los artículos de D'Alembert y de Euler quedó confuso, o fingió estarlo: sus colegas más jóvenes estaban invadiendo su territorio. Y más aún, lo estaban haciendo mediante el uso de nociones y técnicas radicalmente nuevas; éstas, confesó, aunque de una manera algo superior, no tenían sentido para él.

El propio análisis de Bernoulli de las vibraciones de una cuerda aparecieron en las *Mémoires* de Berlín durante 1753. Obtuvo lo que él consideraba que era la descripción más general del movimiento de una cuerda a partir del principio de superposición de modos simples de oscilación, el cual fue el primero en establecerlo. De acuerdo con este principio, cada cuerpo es capaz de poseer una infinidad de modos de vibración distintos que pueden llamarse "simples"; tales vibraciones pueden coexistir sin interferirse una a la otra y sus combinaciones pueden agotar las vibraciones de las que es capaz un cuerpo. En el caso de la cuerda, las vibraciones simples son las estudiadas por Taylor, es decir, aquéllas en las que en cada punto en la cuerda oscila alrededor de la posición de equilibrio, todos los puntos se mueven con el mismo periodo y cruzan el eje simultáneamente (pero Taylor no mencionó los armónicos más altos). Cada una de estas vibraciones simples se pueden describir mediante una función senoidal. Así, concluyó Bernoulli, la vibración más general que se puede producir en una cuerda se puede representar por medio de una serie senoidal:

$$y = Asen\,(\pi x/L) + Bsen\,(2\pi x/L) + Csen\,(3\pi x/L) + \ldots$$

(Lo que representa esta serie es la forma inicial de la cuerda, y no su movimiento; Bernoulli meramente implica la distinción).

Los argumentos de Euler

Lo que hasta este momento he dicho proporciona suficientes antecedentes para mi relato principal, de modo que pasaré por alto la mayor parte del debate y me concentraré, en lugar de ello, en dos argumentos que Euler estableció en su penúltimo artículo sobre la cuerda vibrante. Antes de presentarlos, reformularé las dos cuestiones que hasta ahora han surgido (ellas son afirmaciones por parte de D'Alembert y Bernoulli, pero preguntas en la mente de Euler). Primero, está la objeción de D'Alembert de que las curvas como las que Euler ensambla por pedazos a partir de un arco arbitrario no se pueden aceptar en el análisis. En segundo lugar, está la pretensión de Bernoulli de que cualquier posición de la cuerda se puede describir por una serie senoidal, lo cual para Euler significaba que una función arbitraria se podía representar así.

A la objeción de que el análisis en la época era inadecuado para el estudio de curvas arbitrarias, Euler respondió con un llamado a desarrollar una nueva rama del análisis que fuera adecuada para esa tarea. Aquí D'Alembert, quien percibió que algo no andaba bien todavía, se vio forzado a indicar con toda precisión la fuente del problema. Expresando la segunda derivada de una función como el cociente de la segunda diferencia, $f(x + 2dx) - 2f(x + dx) + f(x)$ y el cuadrado del incremento, dx^2, obtuvo una condición que la solución debe satisfacer para ser legítima: en términos modernos, la solución putativa debe ser dos veces continuamente diferenciable. Vemos a D'Alembert avanzar a tientas hacia nociones que se aclararon solamente durante el siglo siguiente.

Euler respondió a la objeción de D'Alembert con varios argumentos, pero es más significativa la observación general que sirve de prefacio a ellos y que equivale a decir que son innecesarios. Hela aquí:

> ... cómo es posible dudar de la exactitud de una construcción, cuando concuerda perfectamente con la ecuación integral que contiene la solución

> del problema, y hacerlo bajo el pretexto de que la construcción no concuerda perfectamente con la ecuación diferencial de la que se ha extraído la integral. Se han resuelto ya tantos problemas por medio de integraciones, y nadie había pensado hasta ahora en dudar de tales soluciones ...

Euler expresa aquí la opinión de que las operaciones analíticas que se llevan a cabo al resolver una ecuación diferencial siempre generan identidades. Esto es consistente con su actitud hacia otras áreas del análisis.

Un buen ejemplo es su extensión del concepto de suma de una serie. Este concepto en su significación apropiada, dice Euler, se aplica solamente a series convergentes y significa, desde luego, el límite de la sucesión de las sumas parciales que se obtienen al añadir los términos uno por uno, en orden. En este caso, continúa, la suma de la serie coincide con el valor de la función de la cual es una expansión. Euler propone entonces definir la suma de una serie divergente en un punto como el valor de la función de la cual la serie es la expansión, cuando se evalúa la función en el mismo punto. Esta extensión del concepto de suma de una serie es precisamente lo que se necesita para preservar la identidad entre una función y su expansión en serie fuera del intervalo de convergencia de la serie; así, la operación de expander la función en una serie se puede ver como una transformación que preserva la identidad.

El argumento contra Bernoulli que quiero discutir pretende mostrar que (a) la solución de Bernoulli no es general, esto es, hay movimientos no incluídos en ella; y (b) que la propia solución de Euler es más general que la de Bernoulli. El argumento hace uso de la propagación pulsar, la cual Euler fue el primero en describir. Este es el tipo de movimiento que ocurre cuando bajamos y subimos sacudiendo un extremo de una cuerda estando el otro extremo sujetado a un palo. La propagación pulsar, dice Euler, no es una oscilación, pues cada parte de la cuerda se mueve solamente durante parte del tiempo. Pero las series trigonométricas representan una oscilación compuesta, de modo que no representan a la propagación pulsar. La solución de Euler, por otra parte, se aplica igualmente bien a ambos tipos de movimiento.

Lo que impresiona más a un lector moderno en este argumento es la manera en que se trata de establecer una cuestión matemática acerca de la solución de una ecuación diferencial parcial por medio de la distinción física entre los dos tipos de movimiento. Hoy en día esto es heurística y no una demostración. Por otro lado, Euler claramente intentaba que su argumento demostrara la conclusión.

Hay otro aspecto del argumento de Euler cuya importancia quiero recalcar. Es la suposición de que las series trigonométricas no pueden representar la propagación pulsar, debido a que no podemos pensar en esta última como el resultado de oscilaciones simples superpuestas. En esta suposición está implícita la creencia de que una expresión que representa un fenómeno tiene una forma determinada por la estructura del fenómeno al que representa, de tal manera que a un fenómeno cualitativamente diferente debe corresponder una expresión cualitativamente diferente. En lo que sigue relacionaré la creencia recién descrita, más la que previamente se mencionó sobre las operaciones analíticas que producen identidades, con la teoría del conocimiento de la época, según queda ejemplificada por Leibniz, Berkeley y Condillac.

Leibniz

A Leibniz se le atribuye el mérito de haber "marcado el comienzo" del Iluminismo. Esto es particularmente cierto por la forma en que las matemáticas influyeron en su perspectiva del conocimiento humano y el método científico. La geometría tradicionalmente había suministrado el modelo que debía seguirse para diseñar el conocimiento. Para Leibniz, el modelo a seguir era el álgebra más que la geometría, lo cual es característico del siglo XVIII.

Alrededor de 1672, Leibniz comparó los tratamientos unificados de las secciones cónicas dados por Pascal y Desargues, ambos sintéticos, con el analítico, basado en un estudio de la ecuación general de segundo grado en dos variables. Encontró que el acercamiento sintético era "extremadamente difícil porque debemos ... limitar la mente a una acusada imagen del cono". El análisis, por otro lado, "economiza la mente y la imaginación". Ya en 1674 Leibniz imaginó "una gran ciencia a la que suelo denominar *Characteristica*, de la cual lo que llamamos álgebra, o análisis, es solamente una pequeña rama" que lograría justamente eso: economizar la mente y la imaginación; a Leibniz le interesaba especialmente el ahorro de esta última. Un simbolismo que nos capacitaría para calcular sin la necesidad de visualizar lo que estamos haciendo: este es uno de los grandes temas de Leibniz. El escribió:

> Llamo *carácter* a una representación visible de los pensamientos. El *arte característico* es el arte de forjar y disponer caracteres de tal manera que ellos se refieran a los pensamientos, o, en otras palabras, que tengan entre sí la misma relación que tienen los pensamientos entre sí. Una *expresión* es un agregado de caracteres que representan la cosa expresada. La *regla para las expresiones* es la siguiente: hágase que la expresión esté compuesta de los caracteres de aquéllas cosas a partir de cuyas ideas se compone la idea de la cosa que tiene que expresarse.

La característica es un mapa del mundo y de nuestros pensamientos acerca de él. Como en un mapa, bajo los signos convencionales subyacen las relaciones verdaderas que dan a la característica su coherencia interna, la cual le capacita para representar la realidad. No es accidental que el álgebra suministre el ejemplo para ilustrar esta propiedad de la característica, pues el álgebra y la aritmética suministran el modelo para ello. Igual que el álgebra o la aritmética, la característica es un cálculo; pluma y papel debieran ser la última corte de apelación en una disputa (calculemos, Señor). Por causa de ser un cálculo, la característica demostraría sus conclusiones porque, otra vez, igual que el álgebra o la aritmética, "llevaría su propia verificación consigo". Este rasgo distintivo de autovalidación surge del hecho de "que las verificaciones o experimentos hechos en las matemáticas para guardarse de los errores en el razonamiento ... no se hacen en la cosa misma, sino en los caracteres que hemos sustituido en lugar de la cosa". En más de una ocasión, Leibniz ilustra este punto con la verificación de obtener nueves. La verificación no se realiza en los números; sino en los caracteres que usamos para representarlos; además, esencialmente depende de estos caracteres, esto es, de la notación posicional en base diez. La característica es rigurosa porque, para determinar la verdad de una afirmación en ella, no es necesario tratar con el tema de estudio de la característica en lo absoluto, solamente con los símbolos, las marcas en el papel.

Debe mencionarse un aspecto más de la característica de Leibniz: Leibniz pensó en ella como un lenguaje. Escribe acerca de establecer "la gramática de este maravilloso lenguaje universal y ... diccionario que sería adecuado para los casos más numerosos y más recurrentes ..." El lenguaje es, desde luego, ante todo escrito, pero Leibniz también pensó en un sistema de sonidos que permitiría que fuese hablado. Esta concepción presupone una noción abstracta del lenguaje, el cual históricamente fue hecho posible por las reflexiones en los lenguajes y cifras naturales y misteriosas que llegaron a ser corrientes a mediados del siglo XVII.

Berkeley

Berkeley, como Leibniz, da a la palabra "lenguaje" un sentido ampliado. Lo ofrece al buen uso teológico, infiriendo la existencia de Dios a partir de la manera en que nuestras percepciones se interrelacionan. En su *Essay towards a new theory of the vision* [Ensayo hacia una nueva teoría de la visión] –la primera edición decía "el lenguaje universal de la naturaleza": su énfasis cambió hacia el carácter arbitrario del lenguaje–, Berkeley argumenta que nuestra percepción del espacio, exterioridad y distancia, no se origina en la vista, sino en el tacto, en cuyo sentido incluye la cinestesia. Las sensaciones que surgen en diferentes sentidos son dispares, y es solamente nuestra larga experiencia de encontrarlas conjuntas, y el lenguaje, lo que las aparea en un nombre, que nos hace pensar en ellas como una y la misma. Las sensaciones visuales no contienen en sí mismas ninguna idea de distancias o ángulos, pues éstas pertenecen al tacto, pero las sugieren indefectiblemente, tanto como los sonidos de las palabras sugieren los pensamientos. Estos últimos, sin embargo, siendo una convención humana, son fácilmente vistos como signos arbitrarios. Por otro lado, las sensaciones visuales y sus correlativos táctiles fueron instituidos por Dios, tal hecho los hace parecer necesarios. No lo son: ellos meramente dependen de la voluntad de Dios y no de la nuestra.

Para Berkeley es claro que la idea de que la relación entre vista y tacto es totalmente arbitraria puede ser difícil de asimilar. Para anticipar posibles objeciones, plantea la cuestión de si un "cuadrado tangible" no es "más parecido a un cuadrado visible que a un círculo visible": la falta de ángulos y lados rectos en el círculo visible lo haría "inadecuado para representar al cuadrado tangible, pero muy adecuado para representar al círculo tangible". Esto seguramente significa que la relación entre objetos tangibles y sus signos visuales no es arbitraria, sino que está dictada por el parecido, sugiere Berkeley. Su respuesta a la objeción es de lo más interesante:

> Contesto, debe reconocerse que el cuadrado visible es más adecuado que el círculo visible para representar al cuadrado tangible, pero entonces esto no es así porque es más parecido o más de una especie con él, sino porque el cuadrado visible contiene en sí varias partes distintas para marcar las varias partes distintas correspondientes de un cuadrado tangible, mientras que el círculo visible no. El cuadrado percibido por el tacto tiene cuatro lados iguales distinguibles, y también tiene cuatro ángulos iguales distinguibles. Por lo tanto es necesario que la figura visible, que será la más apropiada para marcarlo, contenga cuatro partes iguales distinguibles cor-

> respondientes a los cuatro lados del cuadrado tangible y, de manera análoga, otras cuatro partes iguales y distinguibles por medio de las cuales denotar los cuatro ángulos iguales del cuadrado tangible. Y por consiguiente vemos que las figuras visibles contienen en sí distintas partes visibles, correspondiendo a las partes tangibles distintas de las figuras expresadas o sugeridas por ellas.

No hay comunión secreta ni identidad escondida entre signo y significado; es suficiente que sus estructuras sean isomorfas o, en palabras de Leibniz, que "haya entre las marcas ... una relación u orden que corresponda al orden en las cosas". Esto es lo que hace que un lenguaje sea un lenguaje.

Por el criterio recién establecido ¿no sería el álgebra un lenguaje? Para Berkeley lo es: el "álgebra moderna" es "de hecho ... una especie de lenguaje breve, a propósito y artifical". También es una "ciencia de gran claridad, certidumbre y extensión"; debe estas cualidades al hecho de ser "inmediatemente versada en los signos". Además, debiera servir como modelo para otras ciencias "que, aunque diferentes en naturaleza, propósito y objeto, pueden así concordar en los métodos generales de demostración e indagación". En otras palabras, la ciencia debiera ser tantos cálculos, pues todos ellos, "en cuanto a que son universales y demostrables por la razón humana, se encontrarán versados en signos como su objeto inmediato ..."

Condillac

Un íntimo amigo de D'Alembert, Condillac, distintamente a Berkeley, es una figura de la Ilustración, un *philosophe*. Sus opiniones en álgebra, lenguaje y ciencia, sin embargo, difícilmente difieren de las de Berkeley. "No digo, como los matemáticos – escribió en su *Logique* –, "que el álgebra es un tipo de lenguaje: digo que es un lenguaje, que no puede ser otra cosa". Otra vez el álgebra suministra el modelo que otras ciencias debieran seguir. Dejaré que Condillac mismo presente sus argumentos:

> La más ligera reflexión muestra que entre más simple y más preciso es el análisis, más ilustra; y si se recuerda que el arte de razonar equivale a un lenguaje bien diseñado, se da uno cuenta que la mayor simplicidad y la mayor precisión del análisis no pueden surgir sino de la mayor facilidad y la mayor precisión del lenguaje. Es necesario entonces hacernos una imagen de esta simplicidad y de esta precisión para nosotros mismos para

que podamos enfocarlo tanto como sea posible en todos nuestros estudios.

Y un poco más adelante dice:

> El álgebra, el lenguaje de las matemáticas, es el más sencillo de todos los lenguajes. ¿No habrá, entonces, demostraciones excepto en las matemáticas? Y si las otras ciencias no pueden lograr la misma simplicidad ¿estarán condenadas a no lograr la simplicidad requerida para convencer de que ellas sí demuestran lo que demuestran? Es el análisis lo que demuestra en todas ellas; y demuestra rigurosamente siempre que habla el lenguaje que debe hablar.

Para resumir, los tres filósofos examinados comparten una creencia en la habilidad humana para percibir la estructura esencial de la realidad y expresarla en las reglas de la composición de uno o más lenguajes simbólicos; una confianza consecuente en los resultados del cálculo ciego; finalmente, un programa para construir todas las ciencias siguiendo el patrón del álgebra, lo cual no solamente las haría fértiles, sino también, en su perspectiva, aseguraría sus fundamentos.

¿Cómo se relaciona esto con los argumentos de Euler? Recordemos que él planteó una cuestión puramente analítica, es decir, la representabilidad de todas o solamente algunas de las soluciones de una ecuación diferencial parcial por medio de series trigonométricas usando un argumento físico, es decir, que la oscilación y la propagación pulsar son cualitativamente diferentes. No está combinando ingenuamente los reinos físico y matemático; está muy conciente del proceso de simplificación y abstracción que subyace en la obtención de la ecuación de onda y explícitamente establece que no se puede conseguir de ella más de lo que se le ha puesto. La fortaleza de su argumento realmente parece radicar en la creencia compartida de que la forma de una expresión analítica, su estructura, refleja la del fenómeno que representa; para citar otra vez a Leibniz, que "hay entre las marcas ... una relación u orden que corresponde al orden en las cosas".

En cuanto a la creencia de Euler en la reversibilidad de las operaciones analíticas en las matemáticas, encontramos su contraparte en la creencia de Condillac en la reversibilidad de las operaciones analíticas en general. Es difícil exagerar la importancia de esta idea en la filosofía de Condillac. Para Condillac el análisis es a la vez un método de descubrimiento y un método de demostración, y no es solamente un método, sino *el* método de la adquisición del conocimiento, tal método debe su certidumbre totalmente a la reversibilidad de sus operaciones. Aquí otra vez el modelo es el álgebra:

> Este lenguaje algebraico hace que uno perciba muy claramente cómo se relacionan los enunciados uno al otro en un argumento. Se ve que el último está contenido en el penúltimo, el penúltimo en el antepenúltimo, y así sucesivamente, solamente porque el último es idéntico al penúltimo, el penúltimo es idéntico al antepenúltimo, etc.; y uno se da cuenta que toda la certidumbre del argumento viene de esta identidad.

La creencia de que las transformaciones analíticas de una expresión generan una cadena de identidades es sorprendente en vista de la existencia de ejemplos elementales que demuestran su falsedad. Sugiero que esta creencia es una racionalización de la confianza depositada en el razonamiento ciego o simbólico, en el que los símbolos no necesariamente presentan ideas a la mente, una confianza que los tres filósofos examinados comparten.

Los argumentos de Euler sobre la propagación pulsar y sobre la equivalencia de una ecuación diferencial y una integral obtenida de ella, parecen ahora menos estrafalarios y, sobre todo, menos ingenuos: reflejan el pensamiento contemporáneo sobre el conocimiento y sus fundamentos.