

Análisis lógico

Gonzalo Zubieta R.

El análisis *lógico* es una disciplina que muchos quisiéramos manejar en la forma directa y llana, desprovista de culteranismos, con que se expone aquí.

Un enfoque nítido, acompañado de ejemplos festivos, contribuye a que se cumplan las tres reglas de oro de Whitehead, a saber: *que el interés por el tema surja desde el primer momento, que la potencialidad analítica se ejercite desde el primer momento, y que el beneficio intelectual resultante se sienta desde el primer momento.*

1.1 Traducciones

Proposición es una frase que afirma o niega algo. Ejemplos:

- | | |
|---|------------------|
| (1) Todo pez es acuático | (Categoría) |
| (2) Alguna ave es acuática | (Categoría) |
| (3) Si <i>x</i> es un pez entonces <i>x</i> es acuático | (Hipotética) |
| (4) <i>x</i> es un libro entonces <i>x</i> es caro | (Conjunción) |
| (5) <i>x</i> es un mamífero ó <i>x</i> es acuático | (Disyunción) |
| (6) No es cierto que <i>x</i> es un libro | (Negación) |
| (7) Para todo <i>x</i> , <i>x</i> es mamífero | (Cuantificación) |
| (8) Existe <i>x</i> tal que <i>x</i> es caro | (Cuantificación) |

En las proposiciones (3)-(8) aparecen subrayadas las *componentes* respectivas. La primera componente de una hipotética, o *condicional*, se llama *hipótesis*; la segunda, *tesis*.

A continuación, debajo de cada proposición categórica aparece su traducción analítica:

- (a) Todo metal es pesado
- (a') Para todo x , si x es metal entonces x es pesado

- (b) Ningún metal es pesado
- (b') Para todo x , si x es metal entonces x no es pesado

- (c) Algún metal es pesado
- (c') Existe x tal que x es metal y x es pesado

- (d) Algún metal no es pesado
- (d') Existe x tal que x es metal y x no es pesado

- (e) Todo cambia
- (e') Para todo x , x cambia

- (f) Nadie sabe
- (f') Para todo x , x no sabe

- (g) Algo pasa
- (g') Existe x tal que x pasa

Ejercicios

1. Practique las traducciones anteriores, hasta dominarlas oralmente y por escrito, incluyendo el uso de las comas.

2. Traduzca:

- (a) Todo depende de y
- (b) Todo socio depende de y
- (c) Algo depende de y
- (d) Algún socio depende de y
- (e) x depende de todo
- (f) x depende de todo socio
- (g) x depende de algo
- (h) x depende de algún socio
- (i) Todo lo que depende de x depende de y

(j) x depende de todo lo que depende de y

3. Traduzca en dos etapas:

- (a) Todo libro trata de algún tema
- (b) Algún libro trata de todo tema
- (c) Todo lo que trata de todo tema trata de y
- (d) x trata de todo lo que trata de algún tema
- (e) x trata de todo lo que trata de todo tema

Ejemplo:

- (b) Algún libro trata de todo tema
 - (b') Existe x tal que x es un libro y, x trata de todo tema
 - (b'') Existe x tal que x es un libro y, para todo y , si y es un tema entonces x trata de y .
- Nótese que en la etapa (b') se subraya lo que falta por traducir.

1.2 Negaciones

En la siguiente lista, debajo de cada proposición compuesta aparece su negación, en términos de sus componentes:

- (a) Si x es hijo de y entonces x sabe latín
- (a') x es hijo de y y x no sabe latín

- (b) x juega y y estudia
- (b') Si x juega entonces y no estudia

- (c) x cumple ó y recurre a z
- (c') x no cumple y y no recurre a z

- (d) x no es arquitecto
- (d') x es arquitecto

- (e) Para todo x , x depende de y
- (e') Existe x tal que x no depende de y

- (f) Existe x tal que x es hermano de y
- (f') Para todo x , x no es hermano de y

Según estos ejemplos, la negación de una condicional es la conjunción de la hipótesis y la negación de la tesis; la negación de una conjunción es la condicional que va de la primera componente a la negación de la segunda; la negación de una disyunción es la conjunción de las negaciones de sus componentes; la negación de una negación es la afirmación de su componente; la negación de una cuantificación universal es la cuantificación existencial de la negación de su componente; la negación de una cuantificación existencial es la cuantificación universal de la negación de su componente.

Ejercicios

1. Reproduzca las negaciones anteriores las veces necesarias, hasta dominarlas

2. Traduzca y niegue:

- (a) Todo termina en y
- (b) Todo camino termina en y
- (c) Algo termina en y
- (d) Algún camino termina en y
- (e) x termina en todo
- (f) x termina en todo punto
- (g) x termina en algo
- (h) x termina en algún punto
- (i) Todo lo que termina en x termina en y
- (j) x termina en todo lo que termina en y

3. Compruebe la equivalencia entre (a_1) y (a_2) , entre (b_1) y (b_2) , y entre (c_1) y (c_2) . Para ello traduzca cada frase y niegue el resultado:

- (a_1) El que sabe no se contradice
- (a_2) El que se contradice no sabe

- (b_1) El que no juega hoy juega mañana
- (b_2) El que no juega mañana juega hoy

- (c_1) Lo que es mío es tuyo
- (c_2) Lo que no es tuyo no es mío

Aquí se sobreentiende que la palabra *todo* va antepuesta a cada frase.

4. Traduzca cada proposición, y niegue el resultado:

- (a) Para todo x , x es hermano de alguien
- (b) Existe x tal que x conoce a todos los que existen
- (c) Para todo x , existe y tal que todo amigo de x es amigo de y
- (d) Existe x tal que, para todo y , algún amigo de x es amigo de y
- (e) Existe x tal que, para todo y , x conoce a algún pariente de y

5. Se pasa de una proposición categórica a su contradictoria mediante el *cuadro de oposición*:



Aquí cada flecha conduce de una proposición a su negación. Compruébelo sustituyendo cada proposición por su traducción analítica.

1.3 Definiciones implícitas

Definición implícita de un término es una lista convencional de proposiciones, llamadas *axiomas*, que contienen al término. Por ejemplo, como definición implícita de los términos *veraz*, *mitómano* y *normal*, adoptamos los siguientes axiomas:

- I. Si x es veraz, y x dice que P , entonces P .
- II. Si x es mitómano, y x dice que P , entonces no P .
- III. Si x es veraz, entonces x no es mitómano,
Si x es mitómano entonces x no es normal,
Si x es normal entonces x no es veraz.
- IV. x es veraz ó x es mitómano ó x es normal.

Según estos axiomas, el que es *veraz* siempre dice la verdad, el que es *mitómano* siempre miente, y el que no es veraz ni mitómano es normal. Según III, las categorías de *veraz*, *mitómano* y *normal* se excluyen mutuamente. Según IV, dichas categorías se complementan entre sí.

Las definiciones implícitas son como las adivinanzas: no dicen lo que el objeto es, sino qué propiedades tiene. Toda definición implícita

obliga a interpretar los términos de tal manera que valgan los axiomas. Por eso se dice que los axiomas son *válidos por definición*.

Para evitar discusiones vanas, los diferentes giros de cualquier axioma se admiten también como axiomas. Llámese *giro de P* cualquier proposición cuya negación coincide con la negación de P .

Ejercicios

1. Debajo de cada axioma del grupo III, escribimos su giro:

- (a) Si x es veraz entonces x no es mitómano,
- (a') Si x es mitómano entonces x no es veraz.

- (b) Si x es mitómano entonces x no es normal,
- (b') Si x es normal entonces x no es mitómano.

- (c) Si x es normal entonces x no es veraz,
- (c') Si x es veraz entonces x no es normal.

Reproduzca estas proposiciones. Compruebe oralmente que sus negaciones coinciden, salvo en el orden.

2. Debajo del axioma IV, escribimos dos de sus giros:

- (a) x es veraz ó x es mitómano ó x es normal,
- (a') si x no es veraz entonces x es mitómano ó x es normal,
- (a'') si x no es veraz y x no es mitómano entonces x es normal

Reproduzca estas proposiciones. Compruebe oralmente que tienen la misma negación.

3. Como definición implícita del término *hermano* tenemos los axiomas siguientes:

- (i) x no es hermano de x
- (ii) Si x es hermano de y entonces existe z tal que x es hijo de z y y es hijo de z .
- (iii) Si x es hijo de t y y es hijo de t entonces x es hermano de y , ó x es y .

Reproduzca estos axiomas.

1.4 Tautologías

De las proposiciones

- (1) Si x es rumiante entonces x es mamífero
- (2) Si x es rumiante entonces x es rumiante

La primera es *válida por su contenido*, la segunda es *válida por su forma*. La primera aporta información acerca de los ruminantes. La segunda no aporta información alguna.

Las proposiciones que son válidas por su forma se llaman *tautologías*. Aunque tales proposiciones no aportan información, son útiles al inferir, como veremos después. He aquí otros ejemplos:

- (3) Si x depende de y , y y trabaja, entonces x depende de y .
- (4) Si x llega hoy entonces x llega hoy ó x llega mañana.

Estas dos tautologías se llaman *descendentes*: descendente *del todo a la parte*, y descendente *de lo específico a lo inespecífico*, respectivamente. Al negar una proposición categórica se forman dos tautologías como sigue:

- (5) Si no todo metal brilla entonces algún metal no brilla,
- (6) Si algún metal no brilla entonces no todo metal brilla.

Estas condicionales son tautológicas porque no aportan información sobre lo que es *metal* ni sobre lo que es *brillar*. Las llamaremos *tautologías por oposición*, ya que provienen del cuadro del mismo nombre.

Ejercicios

1. Muchas inferencias se basan en *tautologías descendentes*, como las que siguen:

- (a) Si, para todo x , x depende de y , entonces z depende de y .

Descendente *de lo general a lo particular*: Lo que la hipótesis dice de todo x la tesis lo dice de z . ¿Qué dice la hipótesis de todo x ? Dice que x depende de y .

(b) Si x es metal y x pesa
entonces existe y tal que
 y es metal y y pesa.

Descendente de lo específico a lo inespecífico: Lo que la hipótesis dice de x la tesis lo dice de algún y , sin especificar. ¿Qué dice la tesis de algún y ? Dice que y es metal y y pesa.

(c) Si, para todo t , si x vota por t entonces t pierde,
entonces, si x vota por x entonces x pierde.

Descendente de lo general a lo particular: lo que la hipótesis dice de todo t la tesis lo dice de x . ¿Qué dice la hipótesis de todo t ? Dice que si x vota por t entonces t pierde.

Reproduzca estos tres ejemplos, conservando la colocación de las palabras, e incluyendo las explicaciones que se dan. Practique oralmente estas explicaciones, hasta dominarlas.

2. Otras inferencias se basan en los *silogismos hipotéticos*, que son tautologías construidas a partir de los siguientes esquemas, donde P , Q , R representan proposiciones cualesquiera, y el símbolo \sim significa *negación*:

Si, si P entonces Q ,
y P ,
entonces Q . Modus Ponens

Si, si P entonces Q ,
y $\sim Q$,
entonces $\sim P$ Modus Tollens

Si, si P entonces Q ,
y $\sim P$ entonces Q ,
entonces Q Reducción por Casos

Si, si P entonces Q ,
y, si P entonces $\sim Q$,
entonces $\sim P$ Reducción por Contradicción

Si, si P entonces Q ,
y, si Q entonces R ,

entonces, si P entonces R Transitividad

Para comprenderlos mejor, escriba de nuevo estos esquemas, sustituyendo en ellos las palabras subrayadas, respectivamente por los giros
 Suponiento que, y que, resulta que.

1.5 Deducciones

Deducción de P a partir de H es una cadena de proposiciones P_1, P_2, \dots, P_n , llamadas *pasos*, tales que P_n es P , y cada paso es un resultado conocido, ó es H , ó se infiere de pasos anteriores mediante algún resultado conocido.

Resultado conocido es toda proposición cuya validez se ha demostrado antes, ó que es un axioma ó tautología.

Toda deducción de P a partir de H es una demostración directa de la condicional *Si H entonces P* .

Ejemplo:

Si x es hermano de todo hermano de y entonces x no es hermano de y .

Demostración:

- | | |
|--|--------|
| (1) x es hermano de todo hermano de y | Hpt |
| (2) Para todo t , si t es hermano de y
entonces x es hermano de t | (1) |
| (3) Si x es hermano de y entonces x es hermano de x | (2) |
| (4) x no es hermano de x | Def |
| (5) x no es hermano de y | (3)(4) |

A la derecha de cada paso aparece su *registro*: Hpt si es la hipótesis, (1) si se infiere del paso (1), Def si vale por definición, (3)(4) si se infiere de los pasos (3)(4).

La inferencia de (1) a (2) se basa en la condicional.

Si x es hermano de todo hermano de y
entonces, para todo t , si t es hermano de y entonces x es hermano de t
Válida por traducción

La inferencia de (2) a (3) se basa en:

Si, para todo t , si t es hermano de y entonces x es hermano de t , entonces, si x es hermano de y entonces x es hermano de x .

Descendente de lo general a lo particular

La inferencia de (3) y (4) a (5) se basa en:

Si, si x es hermano de y entonces x es hermano de x ,
y x no es hermano de x ,
entonces x no es hermano de y

Modus Tollens

Ejercicios

1. Reproduzca la demostración anterior y analice las inferencias, tal como se hace ahí.

2. ¿Es posible que x sea hermano de todo hermano de y ? Sí, cuando el padre de x se casa con la madre de y , y de ese matrimonio nacen todos los hermanos que tiene y . Cite otro ejemplo.

3. Si x es hermano de y entonces no todo hermano de y es hermano de x :

(1) x es hermano de y	Hpt
(2) x no es hermano de x	Axioma
(3) x es hermano de y y x no es hermano de x	(1)(2)
(4) Existe t tal que t es hermano de y y t no es hermano de x (3)	
(5) Algún hermano de y no es hermano de x	(4)
(6) No todo hermano de y es hermano de x	(5)

Reproduzca esta demostración y analice las inferencias.

4. Como giro de la condicional del ejercicio 3, tenemos:

Si todo hermano de y es hermano de x entonces x no es hermano de y .
Demuestre directamente este giro.

5. *Si x paga por todos, y sólo y paga por x , entonces x es y :*

(1) x paga por todos y sólo y paga por x	Hpt
--	-----

(2) x paga por todos	(1)
(3) Para todo t , x paga por t	(2)
(4) x paga por x	(3)
(5) Sólo y paga por x	(1)
(6) Para todo t , si t paga por x entonces t es y	(5)
(7) Si x paga por x entonces x es y	(6)
(8) x paga por x	(4)
(9) x es y	(7)(8)

Analice estas inferencias.

6. Si todos pagan por x , y x sólo paga por y , entonces x es y .

Demuéstrelo y analice las inferencias.

1.6 Reducción al absurdo

El método de demostración *por reducción al absurdo*, llamado también *método indirecto*, consiste en suponer lo contrario de lo que se quiere demostrar, y deducir de ahí una contradicción. Por ejemplo, para demostrar P , por reducción al absurdo, partimos de su negación $\sim P$, y deducimos de ella dos proposiciones contradictorias $Q, \sim Q$. Al hacer esto, quedan demostradas las condicionales

Si $\sim P$ entonces Q Si $\sim P$ entonces $\sim Q$

de las cuales se desprende P , por contradicción.

Ejemplo:

A dice que B es mitómano. B dice que A es veraz. Demostrar que A *no* es veraz, y que *si B es mitómano entonces A es normal*.

A *no* es veraz.

Demostración indirecta:

(1) A es veraz	-
(2) A dice que B es mitómano	Dato
(3) B es mitómano	(1) (2)

(1)(2) (4) B dice que A es veraz	Dato
Dato (5) A no es veraz	(3)(4)
Contradicción:	(1)(5)

Los *datos* son válidos por definición, es decir, son axiomas. La inferencia de (1) y (2) a (3) se basa en:

Si A es veraz, y A dice que B es mitómano,
entonces B es mitómano

Axioma I

Si B es mitómano entonces A es normal:

(1) B es mitómano y A no es normal	~
(2) B es mitómano	(1)
(3) B dice que A es veraz	Dato
(4) A no es veraz	(2)(3)
(5) A no es normal	(1)
(6) A es mitómano	(4)(5)
(7) A dice que B es mitómano	Dato
(8) B no es mitómano	(6)(7)
Contradicción:	(2)(8)

La inferencia de (4) y (5) a (6) se basa en:

Si A no es veraz y A no es normal entonces A es mitómano

Axioma IV, girado

Ejercicios

1. Reproduzca las demostraciones anteriores, y analice las inferencias. Demuestre también que B *no es veraz*, y que *si A es mitómano entonces B es normal*.

2. A dice que B es mitómano. B dice que A no es mitómano. Demuestre que B *no es mitómano*, y que *si B es veraz entonces A es normal*. Demuestre también que A *no es veraz*, y que *si A es mitómano entonces B es normal*.

3. A dice que B es normal. B dice que A no es normal. Demuestre que *si A es mitómano entonces B es veraz*, y recíprocamente, que *si B es veraz entonces A es mitómano*. Analice.

4. A dice que B es mitómano. B dice que C es mitómano. C dice que A es mitómano. Demuestre que *si A es mitómano entonces B es normal*, y que *si A es veraz entonces C es normal*. Analice las inferencias.

1.7 Demostraciones directas

Todas las proposiciones sobre veraces y mitómanos, que hemos demostrado por reducción al absurdo, son susceptibles también de demostraciones directas. Ejemplos:

A dice que B es mitómano. B dice que C es mitómano. C dice que A es mitómano.

Si A es mitómano entonces B es normal.

Demostración directa:

(1) A es mitómano	Hpt
(2) A dice que B es mitómano	Dato
(3) B no es mitómano	(1)(2)
(4) C dice que A es mitómano	Dato
(5) A es mitómano	(1)
(6) C no es mitómano	(4)(5)
(7) B dice que C es mitómano	Dato
(8) B no es veraz	(6)(7)
(9) B es normal	(3)(8)

La inferencia de (6) y (7) a (8) se basa en:

Si C no es mitómano, y B dice que C es mitómano,
entonces B no es veraz,
es decir,
si B es veraz, y B dice que C es mitómano,
entonces C es mitómano

Axioma I

Para lograr este giro de la condicional, hemos recurrido al proceso de *contraposición*, que consiste en pasar una componente, de un lado de la condicional al otro, cambiándola por su negación. Se comprueba que la condicional resultante es un giro de la primera.

Si A es veraz entonces C es normal:

(1) A es veraz	Hpt
(2) A dice que B es mitómano	Dato
(3) B es mitómano	(1)(2)
(4) B dice que C es mitómano	Dato
(5) C no es mitómano	(3)(4)
(6) C dice que A es mitómano	Dato
(7) A no es mitómano	(1)
(8) C no es veraz	(6)(7)
(9) C es normal	(5)(8)

En ambas demostraciones, para aprovechar la hipótesis, se pone como segundo paso lo que dice A, y se prosigue en la forma acostumbrada. Una vez agotada esa dirección, se regresa a la hipótesis, escribiendo entonces lo que se dice de A.

Ejercicios

1. Reproduzca las dos demostraciones anteriores, y analice las inferencias.

2. A dice que B es normal. B dice que A no es normal. Demuestre que *si A es mitómano entonces B es veraz* y, recíprocamente, que *si B es veraz entonces A es mitómano*. Analice las inferencias.

3. A dice que B es mitómano. B dice que A es veraz. Para demostrar directamente que *A no es veraz*, vemos qué se dice de A, y procedemos por casos, como sigue:

A no es veraz:

Por casos:

Si B es mitómano entonces A no es veraz:

Si B no es mitómano entonces A no es veraz:

(1) B es mitómano	1er. caso
(2) B dice que A es veraz	Dato
(3) A no es veraz	(1)(2)

(1) B no es mitómano	2o. caso
(2) A dice que B es mitómano	Dato
(3) A no es veraz	(1)(2)

Para demostrar que B *no es veraz*, directamente, observe qué se dice de B, y proceda también por casos.

4. A dice que B es veraz. B dice C es veraz. C dice que A no es veraz. Demuestre directamente que A *no es veraz*, que C *no es mitómano*, que *si B es veraz entonces A es normal*, y que *si B es mitómano entonces C es normal*.

1.8 Encadenamientos

En los ejemplos que hemos visto, cada proposición se ha demostrado independientemente de las demás. Pero resulta más ameno encadenar los resultados, demostrando primero las que son categóricas, y después apoyándose en éstas, demostrando las que son hipotéticas. Además, si una de las proposiciones categóricas es inmediata de la otra, conviene empezar por la que no es inmediata. Ejemplo:

A dice que B es mitómano. B dice que A no es mitómano. Demostrar que A *no es veraz* y que *si A es mitómano entonces B es normal*. Demostrar también que B *no es mitómano* y que *si B es veraz entonces A es normal*.

B no es mitómano:

(1) A es mitómano	1er caso
(2) A dice que B es mitómano	dato
(3) B no es mitómano	(1)(2)

(1) A no es mitómano	2o caso
(2) B dice que A no es mitómano	dato
(3) B no es mitómano	(1)(2)

A no es veraz:

(1) A dice que B es mitómano	dato
(2) B no es mitómano	resul. anterior
(3) A no es veraz	(1)(2)

Si A es mitómano entonces B es normal:

(1) A es mitómano	Hpt
(2) B dice que A no es mitómano	dato
(3) B no es veraz	(1)(2)
(4) B no es mitómano	anterior
(5) B es normal	(3)(4)

Si B es veraz entonces A es normal:

(1) B es veraz	Hpt
(2) B dice que A no es mitómano	dato
(3) A no es mitómano	(1)(2)
(4) A no es veraz	anterior
(5) A es normal	(3)(4)

Ejercicios

1. Reproduzca la secuela anterior, sin el modelo a la vista.

2. A dice que B es mitómano. B dice que A es veraz. Demuestre que *A no es veraz*, que *B no es veraz*, que *si A es mitómano entonces B es normal*, y que *si B es mitómano entonces A es normal*. Hágalo en forma encadenada.

3. A dice que B es mitómano. B dice que C es mitómano. C dice que A no es veraz. Demuestre que *B no es veraz*, que *C no es mitómano*, que *si A es mitómano entonces B no es normal*, y que *si A es veraz entonces C es normal*. Hágalo por encadenamiento.

1.9 Otros ejemplos

E es cretense. E dice que todo cretense es mitómano. Demostrar que *no todo cretense es mitómano*.

Demostración indirecta:

(1) Todo cretense es mitómano	-
(2) Para toda x , si x es cretense entonces x es mitómano	(1)
(3) Si E es cretense entonces E es mitómano	(2)
(4) E es cretense	dato
(5) E es mitómano	(3)(4)
(6) E dice que todo cretense es mitómano	dato
(7) No todo cretense es mitómano	(5)(6)

Contradicción: (1) y (7)

Demostración directa, por casos:

Si E es mitómano entonces no todo cretense es mitómano:

Si E no es mitómano entonces no todo cretense es mitómano:

(1) E es mitómano	1er caso
(2) E dice que todo cretense es mitómano	dato
(3) No todo cretense es mitómano	(1)(2)
(1) E no es mitómano	2o caso
(2) E es cretense	dato
(3) E es cretense y E no es mitómano	(2)(1)
(4) Existe x tal que x es cretense y x no es mitómano	(3)
(5) Algún cretense no es mitómano	(4)
(6) No todo cretense es mitómano	(5)

Este ejemplo, llamado *paradoja de Epiménides*, es el más antiguo sobre veraces y mitómanos. Data del siglo VI, a.J.

Ejercicios

1. Quien afirma que no hay veraces, o mitómanos está expresando una opinión. Aquí no registramos opiniones, por plausibles que sean. Sólo registramos lo que es susceptible de demostración.

Si x dice que nadie es veraz entonces x no es veraz

Si x dice que alguien es mitómano entonces x no es mitómano.

Demuestre indirectamente lo anterior.

2. El que es veraz no lo niega, es decir, *si x es veraz entonces x no dice que x no es veraz*. Demuestre esto indirectamente.

– A tiene la costumbre de decir la verdad. Al comentarse esto entre sus amigos, A, movido por la modestia, afirma no ser veraz. Con esto queda demostrado que A no es veraz y que, por lo mismo, A vuelve a decir la verdad en este caso. Conclusión: para ser veraz no basta decir siempre la verdad, hay que tener el propósito de hacerlo.

3. El que es mitómano no lo anda diciendo, es decir, *si x es mitómano entonces x no dice que x es mitómano*. Demuéstrelo indirectamente.

– B tiene la costumbre de mentir. Al comentarse esto entre sus amigos, B, en un arrebato de entusiasmo, se declara mitómano. Con esto queda demostrado que B no es mitómano y que, por lo mismo, B vuelve a mentir en esta ocasión. ¿Qué se concluye de aquí?