Fundamentos de la probabilidad

Ernesto A. Sánchez S.

Mises, Richard von. *Probability, Statistics and Truth*. New York: Dover Publications, 1957. Segunda edición en inglés preparada y revisada por Hilda Geiringer.

En el transcurso del primer tercio de este siglo se formularon varias respuestas al problema de los fundamentos de la Probabilidad.[1] En 1917, el matemático ruso Bernstein publicó un conjunto de axiomas para esta disciplina [veáse Maistrov 1967]; en 1919, Richard von Mises presenta, por su parte, otra fundamentación de la teoría a partir de lo que se ha llamado el enfoque frecuentista de la probabilidad; en 1921, John Maynard Keynes [1921] aborda el problema desde otra óptica, la cual se acerca a la llamada escuela subjetivista; finalmente, el enfoque predominante en nuestros días fue logrado por Kolmogorov en 1933 [véase: *Mathesis* 4(1988) 153-488].

Probability, Statistics and Truth es un libro de divulgación en que el autor expone los conceptos básicos y las ideas filosóficas de su propuesta de 1919, la cual desarrolló en las décadas subsiguientes. La primera edición se publicó en alemán en 1928, una segunda edición apareció en 1939 y la tercera edición en 1951. En ésta, el autor suprime algunas discusiones dadas en las ediciones anteriores y añade nuevos elementos, teniendo en cuenta las críticas a su teoría así como el desarrollo de la disciplina alcanzado en el tiempo transcurrido desde la primera edición. Reseñaremos aquí la traducción inglesa de la tercera edición.

Algunas de las razones por las cuales pensamos que es importante reseñar este libro son de carácter educativo. A pesar de que el aparato matemático creado por von Mises ha sido actualmente superado, la discusión en torno a sus postulados básicos hace más comprensibles y señala las dificultades que subyacen en teoremas importantes de la aproximación moderna de Kolmogorov.[2] Desafortunadamente, los textos modernos enfatizan los aspectos puramente matemáticos y tocan sólo tangencialmente aquellos que en la versión de von Mises son fundamentales. Mientras en los textos modernos los aspectos fundamentales de von Mises son meros ejemplos, en el libro que reseñamos dichos aspectos pretenden ser la interpretación científica del modelo matemático del azar.

Si bien es cierto que en un sentido matemático el problema de la fundamentación de la probabilidad está resuelto, el de la validez de las inferencias estadísticas todavía origina mucha discusión [cfr. Hacking 1967 y Bartlett 1970], al interior de ella, una corriente de estadísticos se mantienen en posiciones frecuentistas y, en cierto sentido, rehabilitan los argumentos de von Mises.

El libro está dividido en seis lecciones: I La definición de probabilidad. II Los elementos de la teoría de la probabilidad. III Discusión crítica de los fundamentos de la probabilidad. IV La ley de los grandes números. V Aplicaciones en estadística y la teoría de errores. VI Problemas estadísticos en la física

Aquí nos concentraremos fundamentalmente en las primeras cuatro lecciones. En la primera de ellas, von Mises expone el propósito del libro:

> ... demostrar que, comenzando de observaciones estadísticas y aplicándoles un claro y preciso concepto de probabilidad, es posible llegar a conclusiones que son tan confiables y 'verdaderas', y practicamente tan útiles como las obtenidas en cualquier otra ciencia exacta (p. 1).

En su sentido técnico, la probabilidad será una propiedad de una clase particular de fenómenos observables: los *repetitivos*, es decir, los que se repiten bajo las mismas condiciones, y los *masivos*, aquellos que están formados por un número muy grande de procesos semejantes. Por ejemplo, lanzar una moneda es un fenómeno repetitivo, lanzar un millón de monedas es un fenómeno masivo.

En cada prueba de un fenómeno repetitivo o en cada proceso de uno masivo, se observa si se presenta cierto atributo de un conjunto de posibles atributos; el cociente del número de veces en que se manifiesta dicho atributo entre el total de observaciones efectuadas es la *frecuencia relativa* del atributo en estudio. En muchos fenómenos de la realidad se ha verificado que las frecuencias relativas de los atributos tienden a estabilizarse alrededor de un número, el cual será llamado su probabilidad.

Von Mises propone lo que él llama colectivo como el objeto matemático ideal que recoge las propiedades de un fenómeno repetitivo o masivo. Un colectivo es "una sucesión [infinita] de procesos o eventos uniformes, los cuales difieren por ciertos atributos observables" que satisface los siguientes dos postulados: 1) las frecuencias relativas de cada atributo convergen; el límite de la frecuencia relativa de un atributo es su probabilidad. 2) Cualquier subsucesión "elegida por lugar"[3] mantiene las mismas probabilidades para los mismos atributos. Una subsucesión elegida por lugar es aquella cuyos elementos se eligen de la original mediante una fórmula que depende de la posición del elemento elegido y no de su atributo; por ejemplo, una selección por lugar puede ser "elegir los elementos en las posiciones numeradas con números primos"; también es permisible elegir teniendo en cuenta atributos, pero no del elemento elegido, sino de las pruebas hechas antes de él; por ejemplo, "elegir cada elemento que sigue inmediatamente después de las pruebas en que ocurra el atributo X", pero no es válido "elegir los elementos con el atributo X".

Una vez que von Mises ha definido sus conceptos fundamentales, colectivo y probabilidad, en la segunda lección describirá las operaciones fundamentales que se pueden realizar con los colectivos. Aclara que el problema de la teoría de la probabilidad es partir de ciertos colectivos dados y derivar de ellos nuevos colectivos y sus probabilidades. Hay sólo cuatro maneras de generar nuevos colectivos de colectivos dados, las cuales se llamarán operaciones fundamentales: *selección, mezcla* (mixing), *partición, y combinación*.

Desde el punto de vista educativo la tercera y cuarta lecciones son las más interesantes, aunque cada una por motivos diferentes. En la tercera, von Mises apunta las dificultades insuperables de la teoría clásica y expone y enfrenta las objeciones a su propia teoría. Llamamos la atención sobre la actitud reacia de von Mises a aceptar la críticas más fuertes, las cuales se centran alrededor del concepto de colectivo. Los cálculos en la teoría de von Mises se hacen sobre sucesiones infinitas y los resultados son válidos para sucesiones infinitas, aunque en las aplicaciones sólo es posible considerar "sucesiones" finitas, por lo que no hay manera de verificar experimentalmente la teoría.[4] A esta crítica metodológica von Mises responde con analogías: las series infinitas y los límites son conceptos ideales de la teoría, como punto y recta en geometría; la dificultad de evaluar probabilidades en la práctica es la misma que medir otras cantidades físicas, como la densidad de un medio no homogéneo o el peso específico de una sustancia, estas medidas son definidas mediante procesos límite y nada impide que se puedan aproximar satisfactoriamente para las aplicaciones.

Otra objeción difícil de enfrentar es la dirigida contra el postulado de aleatoriedad. La cuestión es que no se proporciona una sola serie que cumpla dicho postulado. En su primera publicación en 1919, von Mises apuntaba:

> ... la existencia de un colectivo no puede probarse por medio de la construcción analítica real de un colectivo, de manera similar a, por ejemplo, la prueba de la existencia de funciones continuas no diferenciables en ningún punto, cuya prueba consiste en exhibir una función con tales propiedades. En el caso de colectivos, debemos estar satisfechos con su existencia 'lógica' abstracta. La prueba de esta 'existencia' es la posibilidad de operar con el concepto sin dar origen a contradicciones (p. 88).

Por ejemplo, no se puede construir un colectivo de ceros y unos con reglas como: "en tal y tal lugar se pone cero y en otros uno"; pues esta regla serviría para elegir solamente una serie infinita de ceros y, por tanto, esta última no conservaría el límite de las frecuencias, lo cual viola el postulado de aleatoriedad. Si fuera posible formar sucesiones de observaciones (de un fenómeno aleatorio), de cualquier manera sería imposible probar su "insensibilidad contra toda selección de lugar", pues no estamos en posición de poder enumerar todas las selecciones de lugar.

Von Mises reafirma que no es necesario exhibir un colectivo, sino probar que postular su existencia no conduce a contradicciones. Un resultado que responde a este problema fue probado desde distintos puntos de vista por varios autores: R. Dörge, A. H. Copeland, A. Wald y W. Feller; dicho resultado dice que: mientras se restrinja el conjunto de posibles selecciones de lugar a un número a lo más numerable, no hay posibilidades de que, por ese supuesto, una teoría lleve a contradicción.

Von Mises no parece darle importancia al salto que hay entre "*toda* selección de lugar", como lo refiere al principio, y un número *a lo más numerable* de ellas. La diferencia entre las dos formulaciones nos lleva a preguntarnos sobre lo que quiere decir von Mises cuando habla de "toda selección de lugar", pues cualquier subsucesión de la sucesión de los naturales puede ser considerada como selección de lugar. El conjunto de tales subsucesiones es no-numerable y, evidentemente, no existe ninguna sucesión que cumpla el segundo postulado de von Mises para este conjunto de selecciones. No obstante, esta caracterización de selección de lugar no parece ser lo que von Mises entiende por ello, pues, aparentemente, considera las seleciones de lugar determinadas por fórmulas explícitas (p.87); pero esta definición es inmanejable.

También anotamos que la solución encontrada al restringir las posibles selecciones de lugar a un número numerable de ellas, evidentemente refleja el punto de vista de la Teoría de la Medida y, por tanto, el enfoque que llevó a la axiomatización de Kolmogorov. Sin embargo, parecería que von Mises no reconoce en este enfoque la solución a problemas que su modelo plantea, pues, para von Mises, las investigaciones de Kolmogorov

> .... no constituyen los fundamentos de la probabilidad, sino los fundamentos de la teoría matemática de las distribuciones [...]. De acuerdo con nuestro punto de vista, este sistema de axiomas [de Kolmogorov] no puede tomar el lugar de nuestro intento en clarificar y delimitar el concepto de probabilidad (p. 99).

La discusión dada en la lección anterior es suficiente para recomendar la lectura del libro si se está interesado en captar la transición de una probabilidad que enfatiza los aspectos empíricos e intuitivos hacia el enfoque matemático abstracto; el intento de von Mises trata de conciliar esos dos aspectos y a través de sus páginas podemos ser testigos de las dificultades para realizar esa aspiración. Los interesados en la enseñanza procuramos frecuentemente conciliar los aspectos intuitivos de los conceptos con sus formulaciones abstractas.

En la cuarta lección, von Mises aborda el problema del significado de la ley de los grandes números, la cual ha causado mucha confusión, especialmente en su relación con la teoría frecuencial de probabilidad. Aclara la confusión que frecuentemente se da (aún hoy) entre la ley empírica acerca de la estabilidad de las frecuencias y la proposición matemática probada por Bernoulli. A una generalización de ésta y a aquella, Poisson las llama indistintamente ley de los grandes números. Resulta ilustrativa la solución que propone von Mises, en la que enfatiza la necesidad de suponer sus propios postulados.

Las últimas dos lecciones abordan lo que para von Mises son las dos aplicaciones más importantes de la probabilidad: problemas de estadísticas sociales y problemas del modelo probabilístico para explicar leyes de la física, cuestiones que aún despiertan el interés de muchos científicos.

Se logra comprender y apreciar el valor de una teoría cuando se conoce y se distinguen los esfuerzos realizados que la hicieron posible; pero éstos no son tan solo aquellos que fueron coronados con el éxito.

Por el contrario, los logros no son concebibles sin muchas exploraciones previas. Este libro de von Mises nos ayuda a comprender el significado probabilístico de muchos problemas de la teoría moderna de las probabilidades, así como los problemas filosóficos que aún siguen abiertos de la aplicabilidad de inferencias estadísticas.

Notas

1. En el sexto problema de su conferencia de 1900, titulado "Tratamiento matemático de los axiomas de la física", Hilbert incluyó el problema de la axiomatización de la Teoría de Probabilidades.

2. Por ejemplo, Feller comenta: "así, los dos teoremas juntos [la ley fuerte de los grandes números y el teorema de la imposibilidad de sistemas de apuestas] describen las propiedades fundamentales de aleatoriedad que son inherentes a la noción intuitiva de probabilidad y cuya importancia fue enfatizada por von Mises" [Feller 1968, 204].

3. Traduzco "place selection" como "elección por lugar" o "selección de lugar".

4. Para una discusión amplia y relativamente actual, veáse Hacking 1965.

Referencias

Barone, Jack; Novikoff, Albert 1977. *A History of the Axiomatic Formulation of Probability from Borel to Kolmogorov, Part I*". Archive for History of exact Sciences 18 (1977).

Bartlett, Maurice S., 1975. *Probability Statistics and Time*. London-New York: Chapman and Hall.

—— 1961. *Probability Statistics and Time*, en Bartlett 1975.

—— 1967. *Inference and Stochastic Processes*, en Bartlett 1975.

—— 1970. *When is Inference Statistical Inference?*, en Bartlett 1975.

Cramer, Harald, 1945. *Métodos Matemáticos de Estadística*. Madrid: Aguilar, 1963.

Feller, William, 1968. *An Introduccion to Probability Theory and its Applications*, V.1. New York: John Wiley & Sons.

Hacking, Ian, 1965. *Logic of Statical Inference*. Cambridge, Cambridge University Press.

Hilbert, David, 1900. Problemas futuros de las matemáticas, en *Diccionario Enciclopédico de las Matemáticas*. México: Editorial del Valle de México, 1982. pp. 280-332.

Keynes, John M., 1921. *Treatise on probability*. Londres: Macmillan, 1973.

Kolmogorov, A.N., 1933. *Foundations of the Theory of Probability*. New York: Chelsea Publishing Company, 1956.

Maistrov, Leonid E., 1974. *Probability Theory. A Historical Sketch*. New York: Academic Press.